RPNS: 2090 | ISSN: 2074-0735
Volumen 20 (2024)
N° 1 (enero - marzo)

Recibido: 01/07/2023 Aceptado: 02/10/2023

Propuesta de tratamiento metodológico de la aplicación del teorema de las tres perpendiculares (Original)

Methodological treatment proposal for the application of the theorem of three perpendiculars (Original)

José Roberto Pedraza Pérez. *Licenciado en Educación. especialidad Matemática. Máster en Ciencias de la Educación. Profesor Auxiliar. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.* [joserpp@uclv.cu] .

Carlos Duardo Monteagudo. *Licenciado en Educación. especialidad Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.* [cduardo@uclv.cu] .

Yumar Martínez Rodríguez. *Licenciado en Educación. especialidad Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.* [yumarm@uclv.cu] .

Resumen

El artículo trata el teorema de las tres perpendiculares, tema que se imparte en el duodécimo grado y es base fundamental para el estudio de futuros contenidos geométricos. Tiene como objetivo elaborar una propuesta para el tratamiento metodológico de la aplicación del teorema de las tres perpendiculares, en los diferentes ejercicios y problemas de cálculo de cuerpos. Para la investigación se utilizó el método dialéctico materialista, con predominio del enfoque cuantitativo y se asumió una muestra de estudio de 23 estudiantes de un grupo de duodécimo grado seleccionado intencionalmente, en el que se aplicó la observación, y el análisis del producto de la actividad entre otros métodos y técnicas, que permitieron constatar las dificultades existentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos relativos a la Geometría del espacio, específicamente en el tema del teorema de las tres perpendiculares. Este contenido resulta complejo para los estudiantes, ya que deben aplicar conceptos, proposiciones y procedimientos. Se precisa entonces de la utilización de esta propuesta para la aplicación del teorema de las tres perpendiculares, que es incorporado mediante ejercicios de demostración. La evaluación parcial del trabajo brindó un resultado positivo, lo que muestra la efectividad del mismo.

Palabras clave: matemática; tratamiento metodológico; aplicación; teorema de las tres perpendiculares

Abstract:

The article deals with the theorem of three perpendiculars, a topic taught in twelfth grade and serves as a fundamental basis for the study of future geometric concepts. Its objective is to develop a mothodological proposal for the application of the theorem of three perpendiculars in various exercises and problems involving spatial calculations. The research utilizes the dialectical materialist method, with a predominance of the quantitative approach, and a sample of 23 intentionally selected twelfth-grade students was used for the study. Observations, analysis of the activity outcomes, and other methods and techniques were employed to identify the existing difficulties in the teaching and learning process related to spatial geometry, specifically focusing on the theorem of three perpendiculars. This theorem proves to be challenging for students, as it requires the application of concepts, propositions, and procedures. Therefore, the use of exercises for demonstration purposes is necessary to apply the theorem of three perpendiculars effectively. The partial evaluation of this work yielded positive results, demonstrating the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: mathematics; methodological treatment; application; theorem of three perpendiculars

Introducción

Los documentos que norman el Tercer Perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación en la República de Cuba, declaran que “la política educacional está orientada a formar ciudadanos con una cultura general integral y un pensamiento humanista y creador, que les permita adaptarse a los cambios del contexto y resolver problemas de interés social con una actitud crítica” (Ministerio de Educación [MINED], 2021, p. 3). Esta concepción es básica para el perfeccionamiento educacional.

Los resultados logrados en la educación promueven la creatividad pedagógica, perfeccionando el proceso enseñanza-aprendizaje. La Matemática tributa al cumplimiento de los objetivos del Sistema Educativo cubano en la asimilación de los conocimientos científicos y la formación de una actitud científica hacia los fenómenos de la realidad y de los valores que responden al encargo social de la escuela; sobre todo, si se tiene en cuenta su carácter integrador, generalizador; así como su incidencia en el desarrollo armónico y multifacético de la personalidad de los estudiantes.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se encuentra en transformación, fundamentalmente consiste en que la formulación y solución de problemas se convierte en su eje central, donde la perseverancia de los estudiantes (Berenguer et al., 2017) es básica para lograr cumplir los objetivos.

En los contenidos geométricos que se estudian en la asignatura Matemática del preuniversitario se constatan dificultades en el desarrollo de habilidades geométricas. Los estudiantes presentan dificultades en la aplicación de conceptos, proposiciones, procedimientos, propiedades y teoremas en general que son objeto de estudio en este nivel, manifestándose esto en la demostración de ejercicios y problemas donde se utilice el teorema de las tres perpendiculares, contenido que se imparte en el duodécimo grado, al no reconocer los elementos que contiene el teorema y dificultades en su justificación.

Por otra parte, en las Orientaciones Metodológicas para la Matemática de duodécimo grado (MINED, 2019) se aprecian limitaciones en la orientación de cómo dar tratamiento a las demostraciones donde se aplique el teorema de las tres perpendiculares.

La habilidad demostrar en Matemática ha sido objeto de estudio por parte de investigadores tales como: Fernández y Gamboa, (2018), Lafaid (2018), Iglesias y Ortiz (2019), Bernardis y Moriena (2021), Quero y Ruiz (2021), entre otros. Estos coinciden en el escaso desarrollo que esta habilidad tiene en numerosos estudiantes.

Otros como Arnaiz et al. (2020) y Ramírez (2021), coinciden en que no existe una conducción adecuada de los estudiantes para resolver ejercicios de demostraciones geométricas, lo que conlleva a la poca motivación y no comprensión de los mismos.

Al iniciar el estudio de la Geometría Espacial o Estereometría, se enfatiza en la visualización de situaciones geométricas espaciales las cuales van a ser representadas en un plano, por lo tanto, la ausencia de tales habilidades prácticamente imposibilita desarrollar cualquier trabajo. Considerando que el tratamiento del teorema de las tres perpendiculares dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Geometría del espacio es un problema generalizado que requiere de soluciones inmediatas.

Esto significa que se requiere de la acción coordinada de los profesores que imparten este contenido para que se logre exitosamente un tratamiento metodológico adecuado. A partir de esta situación, se plantea como objetivo elaborar una propuesta de carácter metodológico para el tratamiento del teorema de las tres perpendiculares, al facilitar encontrar los elementos necesarios para poder aplicarlo en los diferentes ejercicios y problemas de cálculo de cuerpos.

Materiales y métodos

El método general de la investigación es el dialéctico materialista que permitió la conjugación de diferentes métodos y técnicas para el estudio (Lorences et al., 2009). En el diseño de la investigación se tomó como referentes a Hernández et al. (2014), al enmarcarlo en el cuantitativo no experimental, de tipo analítico y transeccional, por las variables que no se manipularon para su estudio y fueron analizadas dentro de un período único.

Se utilizaron métodos teóricos, entre ellos el analítico-sintético como método esencial en la fundamentación teórica, el diseño del sistema de acciones y el análisis de los resultados, en el procesamiento de toda la información recogida y para arribar a las conclusiones; el inductivo-deductivo en la determinación de las regularidades y de las conclusiones. El tránsito de lo abstracto a lo concreto permitió precisar el método racional de la identificación de los elementos necesarios en la demostración del teorema de las tres perpendiculares, por su capacidad para integrar a los demás métodos; y la modelación, utilizada en su representación.

Los métodos del nivel empírico que se utilizaron fueron el análisis documental, en la determinación de los elementos teóricos y metodológicos, y en la revisión de documentos tales como orientaciones metodológicas, programas y libro de texto; la observación, como método esencial en el proceso de aplicación parcial del tratamiento metodológico efectuado de la identificación de los elementos necesarios en las demostración del teorema de las tres perpendiculares.

Se utilizó el análisis del producto de la actividad de los estudiantes tanto en sus resultados en clases, como en las comprobaciones de conocimientos. El análisis porcentual se usó como procedimiento para la comparación de los resultados.

La investigación se desarrolló con 23 estudiantes de duodécimo grado del Colegio Preparatoria de la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villa, Cuba. Estos fueron seleccionados intencionalmente por ser el grupo en que uno de los autores imparte matemáticas.

Análisis y discusión de los resultados

La Geometría del espacio es la rama de la geometría que se encarga de estudiar las figuras geométricas que ocupan un lugar en el espacio. Entre estas figuras voluminosas, también llamadas sólidos o cuerpos, se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera, el prisma, cuyas propiedades y medidas en el espacio tridimensional, son ampliamente utilizadas en las matemáticas, las ingenierías y las ciencias naturales.

La línea directriz Geometría en el Preuniversitario profundiza en los contenidos geométricos adquiridos en el nivel educativo precedente, se introducen nuevos contenidos al

> Introducir el grupo de teoremas de Pitágoras y la resolución de triángulos cualesquiera. La trigonometría se aplica al cálculo de cuerpos. Se introduce el estudio de la geometría analítica de la recta (…) y se cierra con una introducción a la axiomática del espacio, donde se extraen primeras consecuencias de los axiomas de incidencia, orden y paralelismo para estudiar las posiciones relativas entre rectas, así como entre rectas y planos (Ballester, 2018, p. 79).

Para el duodécimo grado se plantea, según Álvarez et al. (2014), formular y demostrar conjeturas y resolver ejercicios de demostración relativos a las propiedades y relaciones de figuras geométricas en el plano y el espacio, utilizando cuando resulte conveniente un asistente de geometría dinámica, aplicando los conocimientos sobre la geometría sintética y analítica del plano y sobre las relaciones entre rectas y rectas y planos en el espacio, de modo que se propicie el análisis, explicación y evaluación crítica de ideas geométricas con ayuda de la terminología y simbología propias de la asignatura.

En el grado se imparten los contenidos de la geometría del espacio, y en este, la geometría sintética del espacio donde se sistematizan los conceptos, relaciones y procedimientos de la geometría plana, para tratar las relaciones entre rectas y planos en el espacio. Con respecto al tratamiento del contenido de las relaciones entre rectas y planos se plantea:

> Lo fundamental a lograr en este punto esencial es que los alumnos apliquen las posiciones relativas de rectas y planos, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos y el teorema de las tres perpendiculares a la resolución de ejercicios sencillos de cálculo geométrico y demostración (MINED, 2019, p. 76).

Para los autores de este trabajo un ejercicio, según Müller (1978, citado por Ballester et al., 1992), es una exigencia para actuar que se caracteriza por el objetivo de las acciones, su contenido y las condiciones.

Los ejercicios de demostración constituyen problemas debido a su complejidad. La concepción de Campistrous y Rizo (1996) acerca de los problemas es asumida en la investigación, según la cual, es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.

El programa de duodécimo grado (MINED, 2019), declara en sus objetivos que se aplique el teorema de las tres perpendiculares al cálculo y a demostraciones sencillas. Para la resolución de ejercicios y problemas de demostración es fundamental los procedimientos heurísticos (principios, reglas, estrategias y programas heurísticos, así como medios auxiliares heurísticos), para descubrir o encontrar una vía de solución. Además, son un recurso importante que permite reflexionar sobre su propio aprendizaje y generar nuevos conocimientos.

En el proceso de demostración de proposiciones matemáticas, en este caso ejercicios y problemas del teorema de las tres perpendiculares, están implícitos los siguientes procesos parciales: búsqueda de proposiciones, proceso en el cual se dirigen las acciones de los estudiantes a establecer una suposición (el teorema buscado); búsqueda de una demostración: proceso en el cual se orienta a los estudiantes a encontrar una idea de demostración para la proposición buscada; y la representación de la demostración: proceso encaminado a la realización de la idea de demostración encontrada (Che Soler, 2007).

En el libro de texto de duodécimo grado (MINED, 2019) se enuncia el teorema de las tres perpendiculares, el cual plantea que si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua.

La demostración de este teorema también aparece en el propio libro de texto y además se llama la atención sobre el cumplimiento de su recíproco, es decir, si una recta de un plano, que pasa por el pie de una oblicua, es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a su proyección.

Visto de esta manera pudiera parecer algo abstracto y un tanto complicado tanto para los profesores que deben impartir este contenido, como para los estudiantes que deben recibirlo; pero un análisis pormenorizado de su contenido podría ayudar al estudiante, bajo la dirección del profesor y sobre la base de la búsqueda de los elementos fundamentales, llegar finalmente a una conclusión acertada, que correspondería a la solución del ejercicio que se plantea.

En el proceso de enseñanza –aprendizaje del contenido se pudieron constatar las carencias, una de las principales dificultades consistía en encontrar un orden lógico y sugerente de los elementos que integra la demostración, dígase una recta contenida en el plano, una oblicua a dicho plan, el pie de la oblicua, la proyección de la oblicua sobre dicho plano y una perpendicular a dicho plano

Por lo que se encauza el trabajo para llevar a los estudiantes al estado deseado, que no es otro que ofrecer un tratamiento metodológico de la aplicación del teorema de las tres perpendiculares, de carácter metodológico que facilite encontrar los elementos necesarios para poder aplicarlo en los diferentes ejercicios de cálculo de cuerpos.

Tratamiento metodológico de la aplicación del teorema de las tres perpendiculares

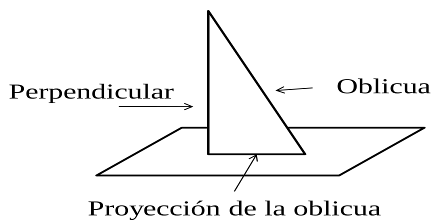
Es conocido como el “método de enseñanza como la principal vía que toman el docente y el alumno para lograr los objetivos fijados en el plan de enseñanza, para impartir o asimilar el contenido de ese plan” (Klingberg, citado por Labarrere y Valdivia, 2001, p. 93)

Al analizar el teorema, se distingue que contiene cinco elementos esenciales:

1. Una recta contenida en el plano.
2. Una oblicua a dicho plano.
3. El pie de la oblicua.
4. La proyección de la oblicua sobre dicho plano.
5. Una perpendicular a dicho plano.

Cuando se habla de una oblicua a un plano se relacionan con ella una perpendicular y una proyección, esta triada conforman un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es la oblicua y los catetos la perpendicular y la proyección de la oblicua respectivamente. Este aspecto tiene cierta relatividad ya que se debe identificar el plano que contiene la proyección sobre la cual se traza la perpendicular, esto depende de la ubicación del plano, como pudieran ser otras como las que aparecen en las figura 1 y figura 2:

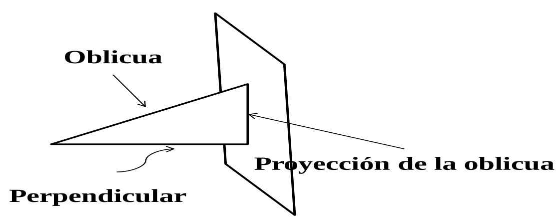
Figura 1



Plano horizontal.

Fuente: Elaboración propia

Figura 2



Plano vertical

Fuente: Elaboración propia

Esta observación realizada anteriormente obedece a que en la mayoría de los casos cuando se explica este contenido se hace a partir de un plano tradicional como lo es la figura 1; pero en los ejercicios el estudiante se enfrenta a situaciones en que no siempre el plano es el tradicional y confunde la perpendicular con la proyección bajo la creencia de que siempre es la que aparece en forma vertical y "constituyen barreras que dificultan un buen aprendizaje" (Rodríguez et al., 2014).

Como que siempre a la oblicua le corresponde la hipotenusa de un triángulo rectángulo la metodología que a continuación se ofrece obedece a organizar la secuencia de búsqueda partiendo del punto donde se supone la existencia de un ángulo rectángulo, que es propiamente el pie de la oblicua, así primeramente se debe reconocer la oblicua y luego los restantes elementos del teorema como aparece a continuación:

1. Reconocer, primeramente, la oblicua al plano.
2. Reconocer la perpendicular al plano y justificar.
3. Reconocer la proyección de esa oblicua sobre dicho plano.
4. Reconocer la recta del plano que pase por el pie de dicha oblicua donde se encuentra dicha proyección y justificar.

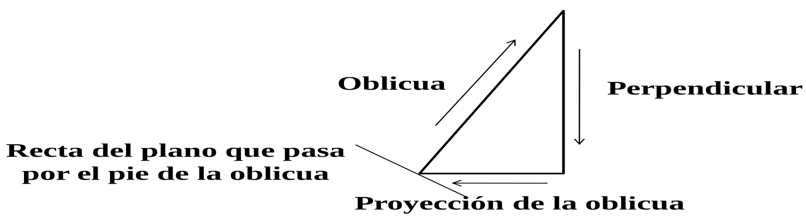
Es de destacar en este aspecto que, tanto la oblicua, la proyección y la recta del plano tienen que coincidir en un punto común, es decir, en el pie de la oblicua sobre el plano dado. La relación entre estos cuatro elementos puede ocurrir de dos maneras diferentes que son las siguientes:

a) Si la recta del plano que pasa por el pie de la oblicua es perpendicular a la proyección de dicha oblicua, entonces la recta del plano es perpendicular a la oblicua (teorema de las tres perpendiculares).

b) Si la recta del plano que pasa por el pie de la oblicua es perpendicular a la oblicua, entonces la recta del plano es perpendicular a la proyección (recíproco del teorema de las tres perpendiculares).

La figura 3 muestra el camino a seguir desde el punto común entre la oblicua, proyección y recta del plano en busca de los cuatro elementos necesarios para la demostración.

Figura 3



Relación oblicua, proyección, perpendicular al plano

Fuente: Elaboración propia

Básicamente la figura recomienda subir por la oblicua, bajar por la perpendicular y cerrar con la proyección, al final se encuentra la recta del plano, el resto es analizar la variante correcta, sea el teorema o su recíproco.

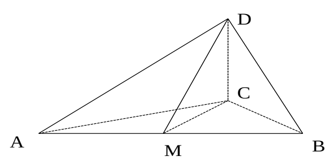
La resolución de ejercicios donde aparecen cuerpos y apliquen el teorema de las tres perpendiculares, constituye un reto a la imaginación y creatividad de muchos estudiantes, los cuales ven en ellos una complejidad mayor. Esto presupone una situación problemática para ellos, una dificultad a ser superada, por lo cual los primeros ejercicios no pueden ser tan difíciles, para que sientan que pueden alcanzar sus metas de lo contrario se sentirán incapaces de intentar resolverlos, lo que provocaría un desinterés en los futuros ejercicios que se presenten.

Es una realidad que ante una misma situación los estudiantes no reaccionan de la misma manera y lo que puede resultar relativamente fácil para unos, puede ser también bastante difícil para otros. El diagnóstico de los estudiantes es importante para saber escoger cuales ejercicios colocar primeramente y sobre esa base aumentar el grado de complejidad hasta llegar al estado deseado.

Ejemplos donde se aplica dicha propuesta.

Ejemplo1. La figura 4 muestra una pirámide recta de base triangular ABC y altura $\overline{CD}$, se conoce además que $\overline{MC} \perp \overline{AB}$. Demuestra que triángulo DMBes rectángulo en M

Figura 4



Pirámide recta de base triangular *ABC*

Fuente: Libro de texto duodécimo grado

Como se debe probar que el triángulo es rectángulo en el punto M, al poner en práctica la propuesta metodológica, debemos destacar lo siguiente:

- Oblicua, proyección y recta del plano tienen como punto común el punto M.
- Es conveniente comenzar a nombrar los elementos a partir de ese punto común en este caso el punto M y en dirección de la oblicua hasta encontrar el punto de contacto con la perpendicular en este caso el punto D, a seguir se continúa nombrando la perpendicular partiendo del punto D en dirección de la perpendicular hasta encontrar el punto de contacto con la proyección que es el punto C, y finalmente a partir del punto obtenido en

dirección de proyección hacia el punto de inicio que es M, esto garantiza la secuencia de encontrar el triángulo MDC.

- Al final en el propio punto de partida se encuentra una recta contenida en el plano que pasa por dicho punto.

Básicamente la solución del ejercicio se muestra a continuación:

- $\overline{MD}$, oblicua al plano de la base de la pirámide.
- $\overline{DC}$, perpendicular al plano de la base de la pirámide por ser la altura de dicha pirámide.
- $\overline{CM}$, proyección de la oblicua sobre dicho plano.
- AB, recta del plano que pasa por el pie de dicha oblicua.

Luego como $AB \perp \overline{CM}$ (por datos), es decir, la recta del plano es perpendicular a la proyección entonces la recta AB es perpendicular a la oblicua, es decir $AB \perp \overline{MD}$ por el teorema de las tres perpendiculares y por lo tanto el ángulo DMBes rectángulo y el triángulo DMBes rectángulo en M.

Este ejemplo es uno de los más sencillos, el cual deberá servir de modelo para la comprensión tanto del teorema como de la propuesta ofrecida, más adelante se propondrán otros ejercicios que irán aumentando el grado de complejidad para ganar seguridad en los estudiantes y al mismo tiempo se puedan ir apropiando de la metodología presentada.

También es necesario que se le presente al estudiante situaciones en los que aparezca la aplicación del teorema de las tres perpendiculares con diferentes órdenes, combinado con otros elementos de cálculo como pudiera ser calcular la longitud de un segmento, un área, el volumen, o algún elemento donde tenga que aplicar la trigonometría, esto aumentará su preparación al integrar contenidos precedentes.

Ejemplo 2.

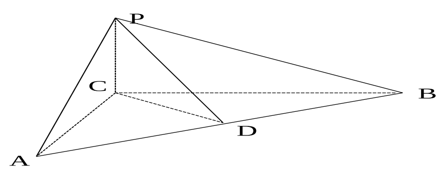
La figura 5 muestra la pirámide recta $PABC$ de altura $\overline{PC}$. Si $\overline{PD}$ es la altura de la cara PAB de dicha pirámide.

a) Prueba que el triángulo ADC es rectángulo.

b) Calcula $\overline{PC}$ si $\overline{CD} = 4,0cm$ y $\angle CPD = 30^o$.

c) Conociendo que $\overline{AB} = 5,0cm$ calcula el volumen de la pirámide $PABC$.

Figura 5



Pirámide recta *PABC*

Fuente. Libro de texto duodécimo grado

Respuesta:

a) Como debemos probar que el triángulo ADC es rectángulo y no especifica donde, entonces procuramos el punto D, que es el pie donde concurren la oblicua, proyección y recta del plano y a partir de ese punto ponemos en práctica la metodología propuesta:

- $\overline{DP}$, es la oblicua al plano de la base que pasa por el pie de la oblicua (D).
- $\overline{PC}$, es la perpendicular al plano de la base por ser altura de la pirámide (datos).
- $\overline{CD}$, es la proyección de la oblicua.
- AB es la recta del plano que pasa por el pie de la oblicua.

Como $AB \perp \overline{DP}$ por ser la altura de la cara PAB, por datos entonces $AB \perp \overline{DC}$, por el recíproco del teorema de las tres perpendiculares y $\angle ADC$ es recto en D, luego el triángulo ADC es rectángulo.

Las respuestas del resto de los incisos no son de interés para este trabajo, es ejemplo de una propuesta de ejercicio de cálculo de cuerpo.

Durante todo el desarrollo de la propuesta se debe insistir en la necesidad de realizar un trabajo organizado y con rigor pues se trata de una demostración, no un ejercicio de cálculo en el que se pueden obviar algunos pasos. Esto es necesario ya que no se encontrarían los elementos para llegar al final de dicha demostración. Igual debe insistirse en el caso de justificar las correspondientes perpendicularidades según sea el caso en los ejercicios que se proponen.

Resolver un ejercicio de este tipo se convierte a menudo en un problema para muchos estudiantes, pero el trabajo sistemático con ellos, en situaciones diferentes, contribuye al desarrollo de habilidades geométricas espaciales.

Resultados parciales de la aplicación de la propuesta en la práctica pedagógica

Los estudiantes solucionaron problemas con grado de dificultad diferente y como parte de la evaluación parcial se realizó el siguiente ejercicio:

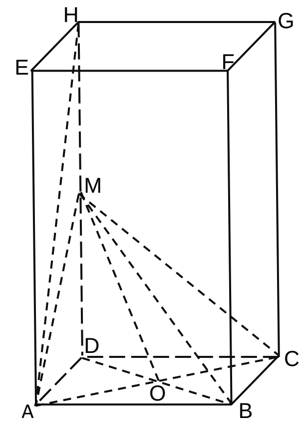
- La figura 6 representa un prisma recto ABCDEFGH cuya base es el cuadrado ABCD y en su interior se encuentra la pirámide oblicua ABCDM.

  – O punto de intersección de las diagonales de la base.

  – M punto medio de $\overline{HD}$.

  – Figura 6

Clasifica el triángulo AOM según la amplitud de sus ángulos



Prisma recto *ABCDEFGH*

Fuente. Libro de texto duodécimo grado

Los resultados obtenidos en el grupo de 23 estudiantes fueron:

- El 65,2% resolvió el ejercicio correctamente, mientras el 21,8% demostraron incorrectamente el teorema de las tres perpendiculares, al determinar un dato con una justificación incorrecta y no concluir, y los demás no fueron capaces de justificar e identificar los elementos necesarios para dar la respuesta. Dos estudiantes intentaron hacerlo por el recíproco del teorema.

- El 100% de los estudiantes identificaron que había que aplicar el teorema de las tres perpendiculares para dar respuesta a lo pedido en el ejercicio.

- El 95,6 % de los estudiantes fueron capaces de reconocer la oblicua al plano, un 91,3 % fue capaz de reconocer la perpendicular al plano, aunque solamente un 78,2 % pudo justificar.

- El 91,3 % reconoció la proyección de esa oblicua sobre dicho plano y finalmente un 95,6% reconoció la recta del plano que pasa por el pie de dicha oblicua donde se encuentra dicha proyección.

- Los que no resolvieron el problema en su totalidad (34,8%) plantearon:

✓ no poder identificar los elementos del teorema de las tres perpendiculares y justificar (17,4%),

✓ forzaron la demostración al determinar un dato mal justificado (26,1%) y

✓ no poder relacionar la proyección de la oblicua con la recta que pasa por el pie de la oblicua y justificar, no llegando a la conclusión correcta (33,3%).

En el intercambio con los estudiantes, declararon que identificaron la oblicua, la perpendicular al plano, la proyección de la oblicua y la recta que pasa por el pie de la oblicua, presentado dificultades en las justificaciones, además, sus carencias matemáticas no les permitieron llegar a feliz término.

Conclusiones

1. Las carencias en cuanto al aprendizaje del teorema de las tres perpendiculares se manifiestan entre los estudiantes del duodécimo grado en el Colegio Preparatoria de la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, específicamente al utilizar conceptos, preposiciones y procedimientos en la resolución de ejercicios donde se aplique la demostración del teorema.
2. La propuesta de tratamiento metodológico para aplicar el teorema de las tres perpendiculares, constituye una alternativa para el contenido de la enseñanza de la geometría del espacio, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el duodécimo grado del preuniversitario.
3. Los resultados obtenidos de su incorporación en la práctica pedagógica son aceptables dada la complejidad del contenido y revelan la necesidad de potenciar propuestas para incorporar en otros contenidos de la enseñanza de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M., Almeida, B., & Villegas, E. V. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos Metodológicos*. Editorial Pueblo y Educación.

Arnaiz, I., García, J. A., & Díaz, M. (2020). Concepción didáctica para aplicar íntegramente las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas. *Educación y Sociedad*, 18(3), 16-29. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8329319

Ballester, S. (2018). *Didáctica de la Matemática* (Tomo I). Editorial Universitaria Félix Varela.

Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A., Rodríguez, M., Batista, L. C., Villegas, E., Almeida, B., & Torres, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática* (Tomo I). Editorial Pueblo y Educación.

Berenguer, I. A., Sánchez, A. G., & Noguerol, Y. S. (2017). *La perseverancia en la resolución de problemas matemáticos*. Ponencia presentada en XV COMPUMAT. https://www.researchgate.net/publication/327270834

Bernardis, S., & Moriena, S. (2021). Geometría Dinámica & Demostraciones Geométricas. *Revista de Educación Matemática*, (1), 74. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10407

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). *Aprende a Resolver Problemas Aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación.

Che Soler, J. (2007). *Didáctica de la Matemática en la Secundaria Básica. Módulo III. Segunda parte. Maestría en Ciencias de la Educación. Mención en Educación Secundaria Básica*. Editorial Pueblo y Educación.

Fernández, H., & Gamboa, M. E. (2018). La didáctica de la geometría en función del desarrollo tecnológico de la pedagogía contemporánea. *Revista Pertinencia Académica*, (6), 63–78. https://revistas.utb.edu.ec/index.php/rpa/article/view/2431

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta. Edición). MacGraw Hill Education.

Iglesias, M. M., & Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *Unión - Revista iberoamericana de educación matemática*, *15*(55). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/297

Labarrere, G., & Valdivia, G. (2001). *Pedagogía*. Editorial Pueblo y Educación.

Lafaid, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Revista de investigación, administración e ingeniería*, 6(1), 33-61. https://doi.org/10.15649/2346030X.475

Lorences, J., Guelmes, L., & Salmerón, E. (2009). La concepción dialéctico materialista de los métodos en la investigación pedagógica. *Revista Varela*, 9(24) http://revistavarela.uclv.edu.cu/index.php/rv/article/view/713

Ministerio de Educación. (2019). *Orientaciones metodológicas. Matemática. Duodécimo grado (provisional)*. Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación. (2019). *Libro de texto de duodécimo grado (provisional)*. Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación. (2021). *Adaptaciones curriculares para el curso escolar 2020-2021. Educación Preuniversitaria. Ministerio de Educación de la República de Cuba*. Editorial Pueblo y Educación.

Quero, O. N., & Ruiz, A. M. (2021). Aprendizaje de un programa heurístico para la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica. *Roca. Revista científico -*

Educacional De La Provincia Granma, *18*(1), 378-399. https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca/article/view/2923

Ramírez, J. (2021). *Estrategias metodológicas para el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos de sexto grado de primaria*. Editorial Pueblo y Educación.

Rodríguez, A., Aliaga, S. G., & González, G. C. (2014). La transformación de los dogmas restrictivos sostenidos por los docentes. *Didasc@ lia: Didáctica y Educación*, 5(2), 1-14. *https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/issue/view/23*