ROCA
REVISTA CIENTÍFICO - EDUCACIONAL
DE LA PROVINCIA GRANMA.

RPNS: 2090 | ISSN: 2074-0735

VOLUMEN 18 (2022)
Número 2 (abril-junio)

REVISIÓN

Recebido: 05/01/2022 | **Acetado**: 01/03/2022

Análise sobre a intuição em Matemática a partir das obras de Henri Poincaré e Efraim Fischbein.

Analysis about intuition in Mathematics based on the works of Henri Poincaré and Efraim Fischbein.

Renata Teófilo de Sousa [rtsnaty@gmail.com]
Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática. Profa. Titular SEDUC/CE.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Fortaleza, Brasil.

Francisco Régis Vieira Alves [fregis@ifce.edu.br]
Doutor em Educação. Prof. Titular IFCE campus Fortaleza.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Fortaleza, Brasil.

Maria José Araújo Souza [mazesobral@yahoo.com.br]
Doutora em Educação. Profa. Titular UVA
Universidade Estadual Vale do Acaraú. Sobral, Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito de intuição e suas diferentes manifestações, na perspectiva dos autores Henri Poincaré e Efraim Fischbein, como uma faculdade cognitiva a ser considerada para o ensino de Matemática. Buscou-se uma visão mais abrangente em relação aos mecanismos do raciocínio intuitivo, utilizando evidências de pesquisas a partir de suas obras, como forma de apoiar e ampliar a interpretação e uso da intuição voltada para o campo da Matemática no âmbito da sala de aula. Para tal, foi adotada a pesquisa bibliográfica como metodologia para este trabalho, em que se realiza uma análise de conteúdo, buscando consubstanciar uma investigação e discussão sobre algumas obras pertinentes ao tema. Por fim, reforça-se a importância de desenvolver nos estudantes a capacidade de diferenciar noções como percepção, sentimentos intuitivos, crenças intuitivas e convicções formalmente sustentadas, depreendendo interpretações adequadas no campo da intuição, juntamente à evolução de estruturas formais do raciocínio matemático.

Palavras-chave: intuição; henri poincaré; efraim fischbein; ensino de matemática.

Abstract

The objective of this work is to present the concept of intuition and its different manifestations, from the perspective of the authors Henri Poincaré and Efraim Fischbein, as a cognitive faculty to be considered for the teaching of Mathematics. A more comprehensive view was sought in relation to the mechanisms of intuitive reasoning, using research evidence from their works, as a way of supporting and expanding the interpretation and use of intuition focused on the field of Mathematics in the classroom. To this end, bibliographical research was adopted as a methodology for this work, in which a content analysis is carried out, seeking to substantiate an investigation and discussion on some works pertinent to the topic. Finally, the importance of developing in students the ability to differentiate notions such as perception, intuitive feelings, intuitive beliefs and formally held convictions is reinforced, inferring adequate interpretations in the field of intuition, together with the evolution of formal structures of mathematical reasoning.

Keywords: intuition; henri poincaré; efraim fischbein; teaching of mathematics.

Introdução

O debate sobre a intuição no âmbito educacional tem sido discutido ao longo de muitos anos dentro do campo da Psicologia Cognitiva. Em particular, pode-se dizer que a intuição remete a um produto de representações feitas a partir da realidade e, nesse sentido, esta tem um papel coparticipante no processo de aprendizagem dos estudantes, que pode ser levado em consideração pelo docente, sendo este papel especialmente significativo no que diz respeito ao contexto da Matemática.

Na etapa escolar é comum que o estudante se aproprie de conhecimentos acerca dos resultados principais da Matemática de forma pronta, em grande parte das ocasiões sem ter a chance de contemplar sua evolução histórica, teorias e demonstrações (Nasser, 2013). Isto nos faz refletir sobre as dificuldades encontradas no percurso dos estudantes nesta disciplina. Alves (2016) complementa que, em muitos casos, tais obstáculos são oriundos do formato com que a disciplina é apresentada, de maneira mecanizada, com algoritmos e macetes prontos, sem levar em consideração o raciocínio matemático, sua natureza e aspectos da Psicologia Cognitiva associados ao seu desenvolvimento.

Para compreender de que forma os alunos desenvolvem o pensamento matemático e suas estratégias para solucionar problemas, devemos considerar os tipos de algoritmos, ideias e teoremas utilizados, compreendendo também que sua linha de pensamento tem relação com a intuição e com o rigor intrínsecos à Matemática.

O intuicionismo, corrente filosófica nascida no final do século XIX, aborda a construção do pensamento matemático com base em ideias intuitivas e outros aspectos da cognição. Desta forma, estudiosos da época, como o matemático e filósofo Henri Poincaré, consideravam que a construção do pensamento matemático era gerada essencialmente com base nas vivências e experiências humanas. “Os matemáticos intuicionistas consideravam a Matemática como uma construção mental, onde os objetos matemáticos são elaborados dessa forma, em que o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais” (Grande, 2013, p. 4).

Já para Fischbein (1993), é válido ter conhecimento sobre a forma como os estudantes solucionam diferentes tipos de problemas, os percalços que eles encontram, bem como a fonte destes e, por sua vez, os erros sistemáticos cometidos por eles, como forma de interpretar e entender aspectos do pensamento matemático e de sua evolução, considerando a intuição neste processo.

Assim, Fischbein (1987a) traz em sua obra *Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach* uma identificação e organização de resultados experimentais relacionados à intuição, bem como revela suas implicações no âmbito educacional, desenvolvido para a ciência e difundido em uma ampla variedade de contextos de pesquisa e voltadas para a Educação Matemática.

Partindo do exposto, o objetivo deste trabalho é apresentar a intuição e suas diferentes manifestações na perspectiva destes autores como uma faculdade cognitiva a ser considerada, buscando uma visão mais abrangente em relação aos seus mecanismos e utilizando evidências de pesquisa em suas obras como forma de apoiar e ampliar a concepção de intuição voltada para o campo da Matemática. Assim, a partir deste estudo, espera-se que os docentes possam perceber as nuances dessa manifestação do pensamento em sala de aula, com base em uma análise das reações e atitudes dos estudantes diante de problemas propostos.

A metodologia adotada para este trabalho é a pesquisa bibliográfica, do tipo análise de conteúdo. Para Bardin (2011), a análise de conteúdo consiste em um conjunto de técnicas que examinam informações no intuito de se angariar, via procedimentos sistemáticos e objetivos, uma descrição do conteúdo a ser pesquisado, permitindo a inferência de conhecimentos através da análise de características que permeiam a estrutura de uma mensagem a ser transmitida.

A pesquisa bibliográfica realizada com o material referenciado, a partir da análise de conteúdo, permite um exame de ideias que convergem para a reflexão sobre o conceito de intuição e seus contributos para o ensino de Matemática, em que se busca discutir a importância da correta interpretação deste conceito e sua relevância no contexto educacional, apresentada na seção seguinte.

Desenvolvimento

A intuição e as contribuições de Henri Poincaré

Nesta seção para além da visão de Poincaré sobre a intuição, traz-se, atrelada a esta, sua oposição à lógica em detrimento da intuição, especificamente no âmbito da Matemática, com a colaboração de ideias de outros autores.

Segundo Alves e Borges Neto (2009, p. 31) possivelmente “o maior defensor da intuição como instrumento de descoberta e invenção matemática tenha sido Henri Poincaré”. As ponderações de Poincaré acerca do domínio da intuição e sua importância na compreensão e no fazer matemático, bem como sua relação com a realidade valorizavam-na enquanto faculdade cognitiva, como apontado no excerto:

> O principal objetivo da educação matemática é desenvolver certas faculdades da mente, e entre elas a intuição não é a menos preciosa. É por meio disso que o mundo matemático permanece em contato com o mundo real. E mesmo que a matemática pura pudesse prescindir dela, ainda teria de ser utilizada para transpor o abismo que separa o símbolo da realidade. O praticante, portanto, sempre precisará dela, e para um geômetra puro deve haver uma centena de praticantes. (Poincaré, 1899, p. 160-161, tradução nossa).

Poincaré discorre em suas obras *como La Science et l'hypothèse (1902), La Valeur de la science (1905), Science et méthode (1908)*, sobre a relevância da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico. Sobre o intuicionismo, Eves (1995, p. 679), explica que:

> A tese do intuicionismo é que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a sequência dos números naturais, dada intuitivamente. Logo, por essa visão, a base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva,

> aliada, sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois, que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante, indefinidamente. Dessa maneira obtêm-se sequências infindáveis, a mais conhecida das quais é a dos números naturais. A partir dessa base intuitiva (a sequência dos números naturais), a elaboração de qualquer outro objeto matemático deve ser feita necessariamente por processos construtivos, mediante um número finito de passos ou operações. Na tese intuicionista o desenvolvimento genético da matemática é levado a extremos. (Eves, 1995, p. 679).

Sobre tais métodos construtivos, Ernest (1991) traz ideias acerca do construtivismo, afirmando que, embora alguns construtivistas defendam que a matemática consiste no estudo de processos construtivos realizados com lápis e papel, a visão mais rígida dos intuicionistas é que a matemática ocorre principalmente na mente, e que a matemática escrita é secundária, ou seja, “o intuicionismo representa a filosofia construtivista da matemática mais plenamente formulada” (Ernest, 1991, p. 12). Este autor ainda aponta, sobre o intuicionismo, que:

> O intuicionismo reconhece a atividade matemática humana como fundamental na construção de provas ou objetos matemáticos, a criação de novos conhecimentos, e reconhece que os axiomas da teoria matemática intuicionista (e lógica) são fundamentalmente incompletos e precisam ser adicionado à medida que mais verdade matemática é revelada informalmente ou por intuição. (Ernest, 1991, p. 12-13, tradução nossa).

Algumas ideias de Ernest (1991) convergem com o pensamento intuicionista de Poincaré (1899), pois em certo ponto ambos consideram que a intuição tem seu valor nas descobertas matemáticas, partindo do pressuposto que esta faculdade cognitiva relaciona a matemática com a realidade e levando em conta que a experiência humana tem influência sobre a construção do

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

pensamento matemático a partir de mecanismos intuitivos. Assim, de alguma forma o papel que a intuição desempenha na evolução, sistematização e padronização do saber matemático é evidenciado (Alves e Borges Neto, 2009).

A intuição, segundo Poincaré, prevalece ao relacionar o mundo matemático com o mundo real, pois só ela pode transpor o abismo que separa o símbolo da realidade, ao contrário da lógica. O autor Grande (2013, p. 5) sobre a obra de Poincaré, *La Science et l'hypothèse*, aponta uma reflexão sobre seu discurso crítico em relação à lógica (logicismo):

> O autor contrapõe-se fortemente ao logicismo, criticando a ideia de submeter à Matemática à lógica, considerando essa última, bem como Aristóteles, como uma ferramenta importante e necessária, mas não uma ciência propriamente dita. Poincaré afirmava que a lógica não cria o novo, pois não se recorre mais aos raciocínios como a intuição. Sendo assim, não é dela que sozinha podemos criar novas ciências. (Grande, 2013, p. 5).

Deste modo, Poincaré sobrepõe o pensamento intuitivo ao pensamento lógico, no que diz respeito à criação científica, em que ele considera que a intuição tem uma maior influência na concepção de novas ideias e conceitos. Vale ressaltar que Poincaré não desconsidera a importância da lógica para a compreensão matemática, mas sim reforça a ideia de que esta não é a base para a criação de novos conhecimentos na área.

Em uma discussão notável sobre a lógica, em sua obra *La Valeur de la Science* (1905), republicada em 1970, Poincaré afirma que "a lógica pura nos conduz sempre, e apenas, a tautologias; nada de novo poderá ser criado exclusivamente a partir dela; ciência alguma pode nascer apenas da lógica." (Poincaré, 1970, p. 32). Ele acrescenta ainda que, em tese, "para produzir aritmética, tal como para produzir geometria, é necessário algo mais que lógica pura. E não temos outro termo para designar este algo senão intuição" (Poincaré, 1970, p. 32).

Em outro de seus escritos, intitulado *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques* (1900), Poincaré traz à tona uma discussão acerca da psicologia da invenção matemática, enfatizando a necessidade de interação entre a análise lógica e a intuição. O papel da intuição na elaboração do pensamento científico é amplamente defendido por Poincaré, especialmente nas construções matemáticas, em que ele considera que a intuição une o raciocínio, ilumina o caminho, orienta os matemáticos e permite que inventem:

> A intuição não se baseia necessariamente no testemunho dos sentidos; não podemos, por exemplo, representar o chilogone[1] para nós mesmos e, no entanto, muitas vezes raciocinamos por intuição sobre os polígonos em geral, que incluem o chilogone como um caso particular. (Poincaré, 1900, p. 121-122, tradução nossa).

Assim, segundo o autor, é a intuição que nos coloca em contato com a realidade, mas ela precisa da lógica para formalizar e complementar as ideias do pensamento intuitivo. Deste modo, Poincaré (1899) afirma que as ideias científicas são concebidas como construções livres do pensamento e nesse espaço de liberdade surge a ideia de criação no trabalho científico, que leva a descobertas. Para ele, a intuição é necessária em todo trabalho criativo.

Deste modo, o autor reitera que a intuição se manifesta de maneiras diversas, que vão desde o apelo aos sentidos e à imaginação, a indução a partir dos fatos, até própria a indução matemática ligada à intuição do número puro (Poincaré, 1900). Contudo, ele elucida um complemento imprescindível à lógica que, por si só, não é suficiente, nem para o ensino, nem para a pesquisa. Poincaré considera benéfico que o aluno aprenda a amar a matemática, pois "a intuição (...) o é ainda mais para o cientista criador. Pois é ela que faz 'ver o alvo de longe', que

[1] Chilogone é, segundo Henri Poincaré (1900), um polígono com mil ângulos e mil lados.

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

permite a 'visão de conjunto' sem a qual não existiria invenção" (Paty, 2001, p. 175 apud Poincaré, 1900).

Na próxima seção, trazemos uma discussão mais subjetiva sobre o domínio da intuição a partir do comportamento humano na perspectiva de Fischbein.

O conceito de intuição na perspectiva de Fischbein

Segundo Fischbein (1987b) o conceito de intuição tem longa história. Filósofos, matemáticos, entre outros cientistas e especialistas têm utilizado, ao longo dos anos, uma variedade de significados para o termo "intuição", como exemplificado no fragmento:

> Segundo Descartes (1967) e Spinoza (1967), a intuição é a fonte inicial e a última garantia confiável de certeza. Na visão de Bergson (1954), a intuição é a chave para compreender a essência dos fenômenos da vida, da duração, do movimento. Filósofos da ciência moderna, como Hahn (1956) e Bunge (1962), consideram a intuição uma forma de conhecimento primitiva e não confiável. (Fischbein, 1987b, p. 48, tradução nossa).

Partindo deste trecho, Fischbein (1987b) aponta que algumas definições propostas são comumente aceitas, sendo a intuição definida como um conhecimento imediato, como uma cognição que é aceita diretamente como evidente a partir de um sentimento de certeza peculiar, sem qualquer imposição de verificação ou prova.

Na obra de Fischbein (1987a), o autor traz uma interpretação da intuição com traços que remetem à óptica kantiana. Para ele, na terminologia de Kant, o conceito de intuição tem um sentido mais restritivo, se comparado aos referidos autores citados no início desta seção. Ou seja, de acordo com Kant, a intuição é simplesmente a faculdade através da qual os objetos são diretamente apreendidos em distinção à faculdade de compreensão através da qual alcançamos o

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

conhecimento conceitual (Fischbein, 1987a). Ainda na interpretação do autor acerca da visão kantiana sobre a intuição, temos:

> Kant usa os termos intuições intelectuais e sensíveis, mas, na prática, é apenas a variante sensível que faz sentido para ele. Uma “intuição intelectual” seria necessária para conhecer o “noumenon”[2], a realidade em si – e isso é impossível. Portanto, na terminologia de Kant, a intuição permanece relacionada ao conhecimento sensorial, enquanto uma intuição “intelectual” simplesmente não existe. (FISCHBEIN, 1987a, p. 4).

Fischbein (1987a) aponta que, a princípio, a cognição cumpre objetivos comportamentais, sendo estes moldados por restrições. O mesmo deve ser dito sobre a intuição, que pode ser considerada uma forma particular de cognição. Do ponto de vista do autor, uma explicação seria que a intuição é geralmente vista como um fenômeno primário que pode ser descrito, mas que não é redutível a componentes mais elementares. “Na verdade, a intuição ainda não encontrou seu lugar definido em psicologia, não porque seja um termo obscuro, mas, ao contrário, porque é implicitamente considerado um termo primitivo e auto evidente” (Fischbein, 1987a, p. 9).

Desta forma, espontaneamente, a intuição tem a aparência de uma cognição auto evidente e consistente, como a percepção de uma cor ou a experiência de uma emoção, por exemplo. Com efeito, geralmente, nenhuma tentativa é feita pelos pesquisadores de usar seus achados experimentais para elucidar a estrutura de fenômenos intuitivos (Fischbein, 1987a). Conforme o autor, de modo antagônico é a intuição que se utiliza como conceito descritivo e explicativo.

No curso do raciocínio humano, entre tentativas e erros, é necessária a confiança em representações e ideias que surgem, de modo subjetivo, como corretas, auto consistentes e intrinsecamente claras. Fischbein (1987a) apoia-se na conjectura de que não se pode duvidar de

[2] Nouminon, na filosofia kantiana: uma coisa como é em si mesma, tão distinta de uma coisa quanto é cognoscível pelos sentidos através de atributos fenomenais.

tudo a todo momento, pois isto causaria a estagnação do conhecimento. Portanto, algumas representações e concepções devem ser tomadas como certas e devem aparecer, subjetivamente, como cognições autônomas, coerentes, total e diretamente aceitáveis a fim de manter o processo de raciocínio funcionando de maneira produtiva.

No que concerne ao âmbito educacional e seus aspectos, de acordo com Fischbein (1987a, 1987b) muitos autores, pesquisadores experimentais e teóricos esforçam-se para estabelecer recomendações que evitem erros de base intuitiva na aprendizagem e resolução de problemas, para melhorar suposições e avaliações intuitivas. No entanto, na perspectiva do autor, dificilmente se pode esperar que tais sugestões sejam realmente úteis caso estas não sejam, de fato, baseadas em uma teoria abrangente da intuição. As intuições são apenas aparentemente cognições autônomas e evidentes, em que dessa forma conferem a algumas das ideias do indivíduo a aparência de certeza e validade intrínseca (Fischbein, 1987a). Entretanto, na realidade, tais ideias parecem muito robustas como um efeito de estarem profundamente enraizadas na organização mental básica do indivíduo.

Além disso, é comum que ocorram equívocos acerca da compreensão conceitual do domínio da intuição, onde outros termos são usados em referência à mesma categoria de fenômenos. Por vezes, as pessoas usam o termo *insight* para indicar um rearranjo global repentino de dados no campo cognitivo que permitiria uma nova visão, uma nova interpretação ou solução nas condições dadas, por exemplo. Ou os termos revelação (especialmente em contextos religiosos) e inspiração (em questões artísticas) também são usados, às vezes, como sinônimos de intuição, ou pelo menos com alguns de seus significados. Muitas vezes, "senso comum", "raciocínio ingênuo", "interpretação empírica" são usados em referência a formas de conhecimento que também podem ser consideradas como equivalentes ao conhecimento intuitivo (Fischbein, 1987a).

O termo intuição se refere a uma grande variedade de fenômenos cognitivos. Para alguns autores, a intuição significa a fonte fundamental de certos conhecimentos. Para outros, a intuição representa um método particular para apreender a verdade, a essência da realidade. Em um terceiro uso, uma intuição é um tipo especial de cognição caracterizada por auto evidência e imediatismo. Para Fischbein (1987a) o termo está relacionado principalmente a este terceiro significado. Uma intuição é uma cognição caracterizada pelas seguintes propriedades: auto evidência e imediatismo; certeza intrínseca; perseverança; coercividade; status da teoria; extrapolação; globalidade; e implicidade. Assim, o autor aponta que:

> O domínio da intuição e o significado diferente e contraditório a que se refere estão relacionados a uma grande variedade de investigações cognitivas. Lembremos alguns deles: Resolução de problemas (iluminação, heurísticas, esquemas antecipatórios etc.); Imagens e modelos (representações intuitivas, modelos intuitivos, meios didáticos intuitivos, pensamento em imagens etc.); crença e níveis de confiança; estágios de desenvolvimento da inteligência (Piaget descreveu pensamento intuitivo como uma fase pré-operacional). (Fischbein, 1987a, p. 5-6, tradução nossa).

Destarte, Fischbein (1987a, 1987b) recorre ao campo da pesquisa em Psicologia Cognitiva e ao campo filosófico em busca de estruturar e desenvolver sua teoria e argumentos em busca de respostas possivelmente exigidas para problemas destas áreas do saber científico.

No que diz respeito ao campo da Matemática, Fischbein (1987b) afirma ainda que o aprendizado de uma definição ou prova formal não determina absolutamente a maneira pela qual um aluno a entende e usa e, deste modo, "obstáculos à compreensão, equívocos e estratégias de

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

solução inadequadas são, muitas vezes, o efeito de influências intuitivas" (Fischbein, 1987b, p. 49).

Abreu e Reis (2011, p. 447) sobre a intuição em matemática apontam a "intuição como a capacidade do aluno de avaliar uma questão segundo a sua percepção (visual, sensorial, tátil) a despeito de qualquer definição rigorosa para o objeto matemático". Isto ajusta-se ao que Fischbein (1987b) aponta como componentes em qualquer atividade matemática:

> (i) o aspecto formal, expresso de forma estritamente redutiva, a partir de uma estrutura lógica da matemática: axiomas, definições, teorias, provas;
>
> (ii) o aspecto algorítmico, que inclui operações matemáticas padronizadas, fórmulas e estratégias de solução, sendo estes os componentes instrumentais de qualquer atividade matemática;
>
> (iii) a dimensão intuitiva, que se refere principalmente à dinâmica da aceitação subjetiva de uma ideia matemática.

Nesse sentido, Alves e Borges Neto (2011) corroboram que:

> Fischbein analisa o complexo e multifacetado raciocínio lógico-matemático. Nunca desconsidera o modo peculiar e diferenciado na Matemática, em relação às outras áreas do saber científico. Analisa também o modo peculiar do surgimento, evolução, abstração e da sistematização das ideias matemáticas. (Alves e Borges Neto, 2011, p. 39).

Portanto, Alves e Borges Neto (2011) apontam que diversas transformações e quebras de paradigmas com relação à Matemática foram consequência das formas de cognição humana, a partir do progresso da capacidade de abstração, em que a intuição fez parte deste processo.

Fischbein (1987a) mostra que ao invés da confiabilidade intrínseca oferecida por objetos reais e por operações realizadas na prática, a matemática trata de um tipo de certeza com base formal. Ao invés de objetos concretos, a matemática postula, de maneira formal e sistematizada, a existência de entidades abstratas. De maneira oposta à verificação empírica, a matemática usa verificações dedutivas por meio de provas formais. Assim, a evidência comprovada substitui a evidência direta. Em oposição à coerência intrínseca, dada das realidades empíricas, a matemática se esforça para criar conjuntos de frases, cuja coerência e consistência são formalmente estabelecidas. "Com efeito, a *intuição* revela elementos que o *processo de formalização* desconsidera ou encobre" (Alves, 2011, p. 25).

Na seção seguinte, discutiremos, na perspectiva dos autores, uma categorização ou classificação dos mecanismos do pensamento intuitivo, como forma de interpretar e compreender de modo mais claro a intuição em Matemática.

Categorização da intuição segundo Poincaré e Fischbein

Castro (2001) aponta que a principal tese de Poincaré é que há um nível de raciocínio matemático considerado irredutível à lógica e que se atinge pela intuição. O posicionamento de Poincaré é assumidamente intuicionista e contrário ao logicismo de Russell[3], com quem travou debates no que diz respeito à epistemologia desta temática.

No que tange à concepção/criação científica, Poincaré (1904, p. 23) aponta que "a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção". O autor Crossi Filho (2012, p. 17) enfatiza ainda que:

> A intuição dos matemáticos é uma faculdade do espírito ativa e criativa que se vale do raciocínio por recorrência, cuja origem surge do princípio sintético a priori da recorrência. A intuição responde pela "construção" das combinações matemáticas,

[3] Bertrand Russell (1872-1970) foi um matemático, filósofo, historiador e logicista do século XX. Em sua teoria, usava a lógica para simplificar conceitos da Matemática, assim como para esclarecer o entendimento dos conceitos em Filosofia, de forma oposta às ideias concebidas por Henri Poincaré.

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

fazendo uso da indução completa e propondo alternativas de ampliação matemática. (Crossi Filho, 2012, p. 17)

Nesse sentido, Poincaré (1904) traz, com relação à esta faculdade cognitiva, que a intuição não é, de fato, empírica, mas sim originada de uma experiência racional e que, a partir desta, torna possível a criação matemática por meio de indução. Ele admite, ainda, que "toda verdade particular pode ser estendida de uma infinidade de maneiras, mas, somente a 'analogia' pode nos guiar por entre as melhores escolhas (1904, p. 91-92).

Para Poincaré (1900) o raciocínio intuitivo tem formas distintas e ele classifica a intuição como: a *intuição sensível*, que remete ao apelo aos sentidos e à imaginação, e a própria indução matemática, relacionada à *intuição ao número puro*, que para ele representa a fonte do raciocínio matemático.

Quando Poincaré (1900) fala sobre *intuição sensível*, ele se refere, de fato, aos sentidos e à imaginação de modo subjetivo, fazendo referência especialmente à geometria. Essa intuição, segundo Poincaré, não é indubitável, contudo, está intricada à invenção do conhecimento matemático. Temos um exemplo acerca desse modelo de intuição apresentado pelo autor a partir da asserção: *"Se numa reta o ponto C está entre A e B e o ponto D está entre A e C então o ponto D está entre A e B"*. É fato que, em busca da validade desta asserção, firmamo-nos na geometria, a partir de seus recursos gráficos de modo a facilitar tal interpretação, por meio da imaginação.

Já no que diz respeito à *intuição pura*, ou *intuição ao número puro*, talvez considerada a raiz do mais genuíno raciocínio matemático, temos, nas palavras de Paty (2001, p. 176) que:

> Essa "intuição pura", dirigida para as formas, relaciona-se à "intuição do número puro", por oposição a uma intuição mais sensível. É ela que permite que o analista sinta o

> "princípio de unidade interna" das entidades abstratas nas quais se baseia o pensamento, segundo a função de percepção sintética atribuída de maneira geral à intuição. (Paty, 2001, p. 176).

Sendo assim, a intuição ao número puro caracteriza-se por ser desprovida de qualquer aspecto geométrico. Segundo Poincaré (1970, p. 20) "a generalização por indução, foi copiada, por assim dizer, dos procedimentos das ciências experimentais" e é uma das categorias básicas das intuições. "Esse raciocínio também pode ser descrito como raciocínio por recorrência, que Poincaré defende ser o único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito" (Grande e Silva, 2013, p. 32).

Contudo, Poincaré (1900) reforça que se deve ter cautela no uso da intuição, pois esta pode fornecer resultados não previstos, dado o fato de que algumas asserções podem ser tomadas como verdade de forma errônea, em uma tentativa de "forçar" uma ideia concebida para provar determinada afirmação ou teoria, ou até mesmo ao empregar rotinas algorítmicas e mecanizadas. Apesar deste ser um processo que por vezes ocorre de forma circunstancial, por vezes não corresponde, de fato à demonstração correta. Assim, ele afirma que "um matemático usa uma regra. Naturalmente ele inicia demonstrando tal regra; e quando a demonstração está clara em sua memória e o mesmo compreende perfeitamente o seu significado, o mesmo passa a empregá-la de um modo mecânico (POINCARÉ, 1921, p. 384).

Antes da categorização da intuição por Fischbein (1987a, 1987b), é importante entendermos como ele detalha o significado característico de alguns processos do raciocínio intuitivo na obra intitulada *Intuitions and Schemata of Mathematical Reasoning* (Fischbein, 1999), como sintetizado por Alves (2016, p. 65):

(i) Cognições auto evidentes: significam que intuições são aceitas sem que o indivíduo manifeste a necessidade de uma checagem/verificação ou prova a posteriori;

(ii) Convicção intrínseca: diz respeito a uma cognição (de natureza privada) intuitiva usualmente associada ao sentimento de certeza, convicção de segurança;

(iii) Sentido coercitivo: que a intuição manifesta um 'efeito coercitivo' no sentido de afetar as estratégias de raciocínio do indivíduo e sua seleção de hipóteses e soluções. Isto significa que o indivíduo tende a rejeitar/negar interpretações alternativas de outrem, as quais contrariem suas intuições privadas e momentâneas;

(iv) Caráter de globalidade: por fim, uma característica basilar entre um raciocínio intuitivo e um raciocínio lógico é descrita pelo autor, distinguimos o caráter de globalidade, isto é, intuições são cognições globais em oposição às cognições adquiridas por uma via de sequências inferenciais (do tipo: Se vale... Então...) e lógicas ou analítico-inferencial. (Alves, 2016, p. 65).

Desta forma, pode-se inferir que no campo da Matemática existem afirmações que aparentemente são aceitáveis de forma direta, como auto evidentes, enquanto para outras asserções necessita-se de uma prova lógica ou formal para aceitá-las como verdadeiras. Assim, o autor generaliza que as cognições intelectuais se apresentam de duas maneiras:

(i) Uma categoria de cognições que parecem diretamente aceitáveis como evidentes por si mesmas. Estas são cognições intuitivas.

(ii) Uma categoria de cognições que são aceitas indiretamente com base em uma certa prova lógica e explícita. Estas são cognições lógicas ou baseadas na lógica. (Fischbein, 1999, p. 18, tradução nossa).

Neste fragmento é possível compreender uma confluência entre a visão de Kant, Poincaré e Fischbein, no que diz respeito ao fato de que é necessário um estímulo para que raciocínios intuitivos sejam externados.

Além disso, Fischbein (1999) faz uma diferenciação entre intuição e percepção, em que aponta que nem toda cognição direta é uma intuição. As percepções são captadas e tem relação direta com os sentidos, porém não são intuições. Intuições são cognições intelectuais, que exprimem uma concepção geral (uma noção, um princípio, uma interpretação, uma previsão, uma solução), ao passo que as percepções são cognições sensoriais (ver uma cadeira, um triângulo, entre outros).

No que remete à categorização da intuição, Fischbein (1987a) considera a relação entre intuições e soluções de problemas, catalogando-as no que ele classifica como categorias do raciocínio intuitivo, sendo estas: *intuições afirmativas, intuições conjecturais, intuições antecipatórias* e *conclusivas*, descritas a seguir na perspectiva do autor.

A primeira categoria corresponde às *intuições afirmativas* que, conforme o autor, fazem menção às representações, explicações ou interpretações diretamente aceitas pelo ser humano como naturais, evidentes e intrinsecamente significativas, como por exemplo, se alguém indagar a uma criança ou estudante o que é uma linha reta, muito provavelmente ele tentará desenhar uma linha reta ou ele mostrará o exemplo de uma linha bem esticada.

A segunda das categorias refere-se às *intuições conjecturais*. Segundo o autor, neste tipo de intuição há uma perspectiva explícita da solução, no entanto esta não está envolvida claramente em um esforço para a sua resolução, ou seja, são suposições associadas ao sentimento de certeza. Representam declarações sobre eventos futuros ou sobre o curso de certo evento, sendo “uma visão preliminar, global que antecede uma solução analítica e completamente desenvolvida de um problema” (Sousa, 2022, p. 202).

No que tange às *intuições antecipatórias* e *conclusivas*, estas representam a terceira e quarta categorias, enquanto as *afirmativas* e *conjecturais* correspondem às duas primeiras. Estas intuições são categorizadas como “intuições de resolução de problemas” (Fischbein, 1987a, 1987b).

Fischbein (1987a, 1987b) afirma que uma *intuição antecipatória* é uma visão global preliminar de uma solução para um problema, que precede a solução analítica totalmente desenvolvida. Deste modo, ao partir dessa compreensão global, da possibilidade de resolução de um problema previamente captada, esta intuição direciona as etapas de busca e construção da solução, em que ocorre uma aplicação concreta de estratégias para construir de modo efetivo a identificação de uma solução. Além disso, pode-se assumir que as intuições antecipatórias são inspiradas ou estimuladas por intuições afirmativas pré-existentes.

No que diz respeito às *intuições conclusivas*, estas sintetizam em uma visão globalizada e estruturada as ideias básicas da solução de um problema, previamente elaboradas, dependendo, assim, dos outros três tipos de intuição citadas anteriormente (Fischbein, 1987a).

Fischbein (1987a, 1987b, 1999) em seus estudos o processo de ensino e aprendizagem ao afirmar que, com frequência, o aluno enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas em níveis mais avançados, pois suas técnicas e estratégias de raciocínio são conduzidas por modelos implícitos, por vezes inadequados. Isto também é reforçado por Poincaré (1921, p. 213), quando este autor deixa claro que “a intuição não nos fornece o rigor, nem igualmente a certeza, que deve ser reconhecida paulatinamente”, ou seja, apenas compreender teoremas e axiomas não garante que o estudante tenha uma aprendizagem com significado ou se desenvolva dentro da temática estudada. Desta forma, como aponta Sousa (2022), o professor deve buscar identificar os modelos mentais desconexos ou incoerentes, fornecendo assistência ao aluno no aprimoramento destes para que seu raciocínio seja construído de maneira adequada.

Partindo desta óptica, Alves e Borges Neto (2011) alertam para o fato de que existem professores que se encontram em uma realidade diferente (paralela à) do estudante, em que suas inclinações, propensões e hábitos formais fornecem um saber matemático de caráter universal, suprimindo a dimensão subjetiva inerente ao cotidiano de seus aprendizes, sendo um formato de ensino que tem provocado, ao longo dos anos, sérios entraves à sua evolução no campo da Matemática. Assim, os autores reforçam sobre a importância de levar em consideração os processos intuitivos no âmbito instrucional, refletindo sobre suas implicações pedagógicas.

Desta forma, os trabalhos de Poincaré e Fischbein podem instigar o docente a questionar-se sobre de que modo ele poderia, por exemplo, identificar a intuição em sala de aula, ou mesmo reconhecer modelos mentais inadequados oriundos da intuição, a partir do conhecimento sobre as formas de manifestação deste tipo de pensamento/raciocínio no estudo da matemática, adequando seus modelos de transmissão didática com base na percepção das diferentes formas de raciocínio intuitivo explicitadas nesta discussão.

Conclusões

A intuição não deve ser evitada ou desencorajada: muito pelo contrário, o ponto chave é desenvolver interpretações novas, adequadas e intuitivas, tanto quanto possível, juntamente com o desenvolvimento das estruturas formais de raciocínio lógico. Isso pode ser feito especialmente por meio de atividades práticas apropriadas e não por meio tão somente de meras explicações verbais. As intuições são por sua função e sua natureza, orientadas para o comportamento e para a prática.

As obras de Henri Poincaré e Efraim Fischbein nos permitem uma compreensão sobre a intuição em um âmbito epistêmico, e porque não dizer também filosófico, além de mostrar sua relevância para o campo educacional. Um professor pesquisador, diante de tais noções sobre a intuição, tem a possibilidade de compreender com mais clareza as dificuldades de aprendizagem que permeiam o campo da Matemática, podendo predizê-las e, eventualmente, superá-las. Neste caso, a intuição configura-se em um campo a ser explorado pelo professor, fornecendo informações a partir de uma análise atitudinal do estudante, de forma subjetiva, onde é possível identificar o raciocínio intuitivo na resolução de problemas.

Portanto, uma das tarefa fundamentais da Educação Matemática é desenvolver nos alunos a capacidade de distinguir entre sentimentos intuitivos, crenças intuitivas e convicções formalmente suportadas. Segundo os autores estudados, a prova formal em Matemática é decisiva e sempre se deve recorrer a ela, porque as intuições podem ser enganosas. Isto é uma ideia que o aluno deve aceitar teoricamente, mas que também deve aprender a praticar de forma consistente em seu raciocínio matemático. Desta forma, seria um equívoco repelir ou afugentar a confiança dos alunos em suas manifestações intuitivas. Para evitar isso, é importante desenvolver nos alunos a convicção de que a também existem intuições corretas e úteis e que podemos nos tornar capazes de controlar nossas intuições assimilando estruturas formais adequadas.

Por fim, em uma perspectiva futura, esperamos que o docente considere a intuição no aprendizado de Matemática, tendo em vista suas potencialidades na evolução do pensamento matemático, interpretando-a em sua prática pedagógica e buscando identificar os modelos

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

mentais construídos pelos estudantes em sala de aula e, se for o caso, corrigi-los, empenhando-se para uma melhora do cenário que diz respeito à aprendizagem desta disciplina.

Referências bibliográficas

Abreu, O. H., e Reis, F. S. (2011). Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, 13(3), 439-459.

Alves, F. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.* [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará]. http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

Alves, F. R. V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia*, 9(3), 1-21.

Alves, F. R. V., & Borges Neto, H. (2009). A intuição na Sequência Fedathi: uma aplicação no Ensino Médio. *Conexões, Ciência e Tecnologia*, 3(1), 30-41.

Alves, F. R. V., & Borges Neto, H. (2011). A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor. *Conexões, Ciência e Tecnologia*, 5(1), 38-54.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo.* São Paulo: Edições 70.

Castro, E. (2001). *O intuicionismo de Henri Poincaré: Divulgação e Filosofia da Ciência na obra de Henri Poincaré*. [Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa].

Crossi Filho, O. (2012). *A epistemologia da ciência de Henri Poincaré : para além do convencionalismo e do realismo estrutural.* [Dissertação de Mestrado em Filosofia, Universidade São Judas Tadeu]. https://www.usjt.br/biblioteca/mono_disser/mono_diss/2013/237.pdf

Eves, H. (1995). *Introdução à história da matemática.* Campinas: Unicamp.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education: studies in Mathematics Education.* London: Routledge Falmer.

Fischbein, E. (1987a). *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach.* Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

Fischbein, E. (1987b). The intuitive dimension of Mathematical Reasoning. In: Romberg, T. A., and Stewart, D. M. (org.). *The Monitoring of School Mathematics: Background Papers,* volume 2: Implications from Psychology. Wisconsin Center for Education Research, Madison, p. 47-70.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38(11), 11-50.

Grande, A. L. (2013). A intuição segundo Poincaré e o Princípio de Cavalieri na resolução de algumas questões relacionadas ao cálculo. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* Curitiba – Paraná. http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/326_299_ID.pdf

Grande, A. L., e Silva, B. A. (2013). Resolução de questões relacionadas ao cálculo e o uso da intuição e do rigor. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, 2(1), p. 27-38.

Nasser, L. (2013). O papel da abstração no pensamento matemático avançado. In: Flores, R. (org.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, cap. 2, p. 891-897. http://funes.uniandes.edu.co/4175/1/NasserOpapelALME2013.pdf

Paty, M. (2011). A criação científica segundo Poincaré e Einstein. *Estudos Avançados,* 15(41), 157-192.

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la Science Mathématique. *L´enseignement Mathématique*, 1, 157-162.

Poincaré, H. (1900). *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*. In: Compte-rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris, 115-130.

Poincaré, H. (1902). *La science et l'hypothèse.* Paris: E. Flammarion.

Poincaré, H. (1904). *L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques.* Musée pédagogique, Paris. Publications du Musée pédagogique, 6, Imprimerie Nationale, 1-28.

Poincaré, H. (1905). *La valeur de la science.* Paris: E. Flammarion.

Poincaré, H. (1908). *Science et méthode.* Paris: E. Flammarion.

Poincaré, H. (1921). *The foundations of the Sciences*. New York: The Science Press.

Poincaré, H. (1970). *La valeur de la science.* Coleção Champs, vol. 230. Paris: E. Flammarion.

Sousa, R. T. (2022). A intuição em ciências e matemática: uma abordagem educacional. Resenha de Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational

Library. *Revista Contraponto*, Blumenau, 3(3), 199-203.

https://doi.org/10.21166/ctp.v3i3.2083