Revisión

CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS DE AXIOMAS EN LAS TEORÍAS MATEMÁTICAS

Characteristics of the systems in the axions in mathematical theories

MSc. Fidel de Jesús López-Novoa. Universidad de Granma, flopezn@udg.co.cu, Cuba
Dr. C. Guillermo Bello-Rodríguez. Universidad de Granma, gbellor@udg.co.cu, Cuba
Dr. C. María Isabel Machado-Solano. Universidad de Granma, mmachados@udg.co.cu, Cuba
Dr. C. Sergio Martínez Maillo, Universidad de Granma, Cuba, smaillo@nauta.cu

Recibido 05/04/2017 Aceptado 18/05/2017

RESUMEN

En el desarrollo de la Matemática se consideran cada vez objetos más abstractos, incluido el tipo de relaciones cuantitativas y formas espaciales de los objetos de la realidad. En las teorías matemáticas modernas estas relaciones y formas frecuentemente se presentan de manera sumamente abstracta, en ellas se habla de conjuntos de elementos y relaciones entre ellos, cuyas propiedades, características y reglas de operación se dan con ayuda de un sistema de axiomas.

Palabras claves: teoría, propiedades, axioma, cuantitativa

ABSTRAC

In the development of mathematics, objectives are currently more abstract, including the types of quantitative relationships and space form of objects from reality. In mathematical theories these relationships are very abstract, whose properties, characteristics, and rules of operations are given with the help of a system of axioms.

Key words: theories, properties, axiom, quantitative.

INTRODUCCIÓN

Todas las ramas de la Matemática, por muy diferentes que ellas parezcan, están unidas por su objeto de estudio. Este objeto lo constituyen, según definición de Engels, las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real. Las diferentes teorías matemáticas tienen que ver con las formas particulares, individuales, de estas relaciones cuantitativas y formas espaciales.

Como todas las otras ciencias, la Matemática estudia las propiedades del mundo objetivo, pero realiza este estudio con sus métodos específicos, los cuales, ante todo, están condicionados por el mismo objeto de la Matemática. Si la Física, la Química, la Biología estudian diferentes formas de movimientos de la materia en las cuales aparecen las características cualitativas del mundo real, entonces, la Matemática estudia las más generales de las relaciones cuantitativas, las cuales se encuentran presentes en cualquier forma de movimiento de la materia.

Los objetos abstractos de la Matemática se destacan ante todo, por su contenido objetivo, esto es, por aquel aspecto de la realidad que reflejan. Además, dado que en el mundo real la cantidad no existe fuera de la calidad, la Matemática, estudiando las relaciones cuantitativas, está capacitada para descubrir determinados aspectos cualitativos de los procesos reales estudiados. Esto explica la creciente aplicación de los métodos matemáticos para el análisis de los hechos, procesos y fenómenos cada vez más complejos. A su vez, subraya la importancia universal del estudio de los métodos más generales de la Matemática.

Es así que tos objetos de las teorías matemáticas no representan directamente la realidad dada. Ellos son fruto de la abstracción. Para investigar cualquier objeto de la realidad con los recursos que brinda la Matemática, es necesario abstraerse de todas sus cualidades particulares, excepto de aquellas que caracterizan directamente la cantidad o la forma.

DESARROLLO

La historia de la Matemática muestra que lo importante y lo determinante en el desarrollo de esta ciencia tan abstracta, lo constituyen las exigencias de la realidad material. Lo abstracto del objeto de las matemáticas sólo ensombrece el surgimiento de todos los conceptos de la Matemática a partir de la realidad material, pero en ningún caso lo suprime. Una correcta comprensión materialista del objeto de estudio de la Matemática y el conocimiento de su historia es una condición necesaria para la comprensión cabal del lugar de esta ciencia en la actividad productiva y social de los hombres.

Las teorías matemáticas en el transcurso de su desarrollo histórico han acumulado una gran cantidad de hechos que confirman que los conceptos, las propiedades y las demostraciones lógicas tienen una procedencia práctica vinculada a los procesos reales del mundo exterior. No sólo se refiere esto a la época prehistórica de la Matemática, sino también a nuestros días. Se refiere tanto al surgimiento de la Geometría en el antiguo Egipto, ligado a los problemas de la crecida de los ríos y la construcción de pirámides, como a la formación de la teoría de las Geometrías no euclidianas vinculadas con la Física relativista.

El campo de aplicación de las teorías matemáticas se amplía constantemente; a esta ampliación no es posible ponerle límite. El crecimiento de las aplicaciones es una de las evidencias de la existencia y fortalecimiento de las relaciones de la Matemática con otras ciencias. Las teorías matemáticas no sólo se desarrollan bajo la acción de otras ciencias; ellas, a su vez, introducen en otras ciencias los métodos matemáticos de investigación científica. Esto ha dado lugar a que se le llame a la Matemática "la reina y servidora de todas las ciencias".

Para describir una teoría matemática, se hace necesario un lenguaje en el cual se pueda hacer esta descripción. Ello lleva consigo la necesidad de considerar algunos términos o conceptos de este lenguaje como primitivos, dicho con otras palabras, como conceptos que no pueden ser definidos, ya que su posible definición se realizaría en función de otros términos que a su vez tendrían que ser definidos, siguiéndose así una cadena que nunca tendría fin. Ejemplos de tales términos son "número" y "sucesor", en la teoría de los números naturales; "punto" y "recta", en Geometría, etc. A tales conceptos los llamaremos conceptos básicos o primarios.

En las diferentes teorías, a grandes rasgos, hay dos tipos de conceptos básicos o primarios. Los primeros se refieren a los elementos que se supone pertenecen a determinados conjuntos, por ejemplo, se habla del conjunto de los números naturales, el conjunto de las rectas, etc.; y los segundos son, de manera general, relaciones que se establecen entre elementos de los conjuntos antes mencionados.

Así, por ejemplo, si consideramos un grupo (G,*), "*" es en este caso un subconjunto del producto cartesiano GxG. En la Geometría plana consideramos un conjunto cuyos elementos se llaman puntos y un conjunto cuyos elementos se llaman rectas. La expresión "el punto P incide con la recta r", representada mediante la expresión simbólica PIr es una relación establecida entre puntos y rectas, es decir, I es en este caso un subconjuntos del producto cartesiano PxR.

El análisis de los dos ejemplos anteriores y de otros muchos de la Matemática, nos hace ver que al estudiar una teoría, ésta puede considerarse desde el siguiente punto de vista: Se tienen uno o varios conjuntos cuyos elementos son objetos de naturaleza variada (números, vectores, puntos, rectas, etc.), y una o varias relaciones entre los elementos de uno o varios de los conjuntos considerados (adición de números, producto escalar de vectores, incidencia de puntos y rectas, ortogonalidad de rectas, etc.). Las relaciones establecidas satisfacen diferentes condiciones, por ejemplo, la adición de números naturales debe ser asociativa, la ley de composición interna en un grupo debe tener un elemento neutro, incide una y solo una recta por dos puntos diferentes, etc.

Tratando de encontrar un lenguaje común que englobe los ejemplos arriba considerados llegamos al concepto de estructura que definimos a continuación. Una *estructura* es un n-tuplo ordenado (C_1, C_2,..., C_m, R_1, R_2,..., R_{n-m}), cuyos primeros m elementos (m<n), son conjuntos no vacíos, llamados conjuntos base de la estructura y los restantes n-m elementos son relaciones o conjuntos de relaciones entre elementos de los conjuntos base de la estructura.

De forma general, para las relaciones R_1, R_2,..., R_{n-m} dadas en las estructuras consideradas, es necesario precisar, salvo en casos que sean dadas explícitamente, las propiedades que las mismas poseen. Esto se hace mediante la declaración de las propiedades de cada relación o conjunto de relaciones; dichas propiedades reciben el nombre de axiomas. Al conjunto de todos los axiomas de una estructura se le llama sistema de axiomas de la estructura. Así, se habla de los axiomas de grupo, axiomas de la Geometría euclideana, axiomas de Peano, etc.

Debe destacarse que en las estructuras con las cuales trabaja la Matemática por lo general no se hacen declaraciones sobre la naturaleza de los elementos de los conjuntos base. Así, cuando hablamos de grupo decimos que en (G,+) G es un conjunto no vacío y +: GxG en G sin decir quiénes son los elementos de G. Igualmente ocurre cuando trabajamos con estructuras geométricas y hablamos de punto, recta, sin especificar qué cosa es un punto o una recta, lo que concuerda con lo que expresamos de los conceptos básicos o primarios.

No obstante, dada una estructura con los axiomas relativos a las relaciones de la misma, se pueden dar otras estructuras donde se explicitan determinados objetos y relaciones de forma tal que estos objetos y relaciones satisfagan las características de la estructura dada previamente y las relaciones dadas cumplan los axiomas que se tienen. Aclaremos esta idea con un ejemplo:

Si (G,+) es un grupo y consideramos un conjunto G'={a,b} y una relación +' subconjunto del producto cartesiano GxGxG dada por: +':= { (a,a,a); (a,b,b); (b,a,b); (b,b,a) } entonces (G',+') es una estructura y la relación dada +' satisface los axiomas de grupo. Estamos entonces en presencia de una estructura (G',+') que sirve de representante de la estructura general (G,+). Llegamos así al concepto de modelo.

Un modelo es una estructura que sirve para representar a otra; es decir, es toda elección concreta de objetos que se consideren como objetos del sistema dado de axiomas.

Así, por ejemplo, la Geometría Analítica no es más que un modelo analítico de la estructura de espacio euclídeo tridimensional, que se desarrolla en la Geometría Sintética. En ese modelo analítico, en el caso del plano, un punto no es más que un par ordenado de números reales (x,y) y una recta no es más que un conjunto de puntos que satisface una ecuación de la forma ax + by + c = 0 con (a,b) distinto de (0,0) y a, b pertenecen a los números reales, es decir, en esta estructura analítica se explicitan los elementos de los conjuntos base de la estructura geométrica del espacio euclideano y se comprueba que se satisface el sistema de axiomas de la misma.

La cuestión de la modelación de procesos es muy importante en la actualidad. Cuando nos proponemos el estudio de alguna estructura de la realidad, digamos, un proceso físico o de otro tipo, por lo general se busca un modelo de dicha estructura que permita hacer predicciones sobre el comportamiento de dicho proceso. No obstante, aún en los casos más sencillos, las estructuras de la realidad son extremadamente complicadas y es por eso que al tratar de construir un modelo para investigar el proceso, se hace necesario tomar solamente una parte de los conjuntos y de las relaciones establecidas entre ellos. El papel del investigador es precisamente tratar de determinar cuáles son los conjuntos y las relaciones esenciales de la estructura que se quiere estudiar.

Veamos ahora la cuestión de los axiomas de una estructura. Como dijimos, los axiomas establecen las características de las relaciones que se establecen en las estructuras.

Las estructuras que para nosotros hoy son tan claras, por ejemplo, las de grupo, son el producto de un desarrollo histórico. Tal vez el mejor ejemplo de ello es el concepto de "estructura de espacio euclídeo", la cual demoró más de 20 siglos en conformarse completamente, a pesar de que desde el siglo III a.n.e. se conocían los resultados de dicha teoría; sin embargo, no se tenía un sistema de axiomas completo de dicha estructura, y puede considerarse la primera estructuración axiomática de la misma la elaborada por D. Hilbert en 1899.

En principio, el matemático está en plena libertad de considerar estructuras axiomáticas, pero en el fondo subyace la experiencia del trabajo con la realidad o con abstracciones más generales elaboradas a partir de otras estructuras ya conocidas. Razonando sobre la esencia y significado de las abstracciones matemáticas, es necesario tener presente constantemente que el pensamiento matemático no es más que una forma específica del proceso general del pensamiento y que también a él es aplicable la aseveración de Lenin sobre el pensamiento: "El pensamiento que se eleva de lo concreto a lo abstracto, si es correcto (...) no se aleja de la verdad, sino que se acerca a ella (...) todas las abstracciones científicas (correctas, serias, no absurdas) reflejan la naturaleza de una manera más profunda veraz y completa".

Así, la estructura abstracta de espacio euclídeo no es más que la búsqueda de un modelo del espacio real en que vivimos. El axioma de esta teoría que plantea que por dos puntos diferentes pasa exactamente una recta no es más que la expresión abstracta del problema de unir dos estacas clavadas en la tierra mediante una cuerda tensa.

No obstante, el desarrollo del hombre permite elaborar otros modelos matemáticos del mismo espacio real utilizando axiomas muy disímiles, los cuales no tienen una interpretación tan evidente como la señalada. Pero esta elección de los axiomas de una estructura está restringida por algunas condiciones que limitan la libertad de elección. Vamos a describir ahora cuáles son las exigencias que se le plantean al sistema de axiomas de una estructura dada.

Evidentemente, la primera pregunta que uno se formula es la referente a la obtención de los axiomas; es decir, de dónde se obtienen y qué características deben tener.

Si tuviéramos que construir un sistema de axiomas para una estructura matemática, tendríamos que empezar por seleccionar ciertos conceptos básicos que dejaríamos sin definir por las razones que ya hemos discutido antes, y luego examinaríamos las proposiciones de la teoría, intentando seleccionar algunos, teniendo en cuenta su simplicidad y su adecuación para dar de sí las otras no seleccionadas; a estas las llamaríamos axiomas, y quedarían sin demostrar en nuestra teoría.

Pero si no se definen los conceptos básicos en la estructura, ¿qué significación vamos a atribuirles? La respuesta es, que resulta del todo innecesario atribuirle significación particular alguna. Es verdad que en la axiomática que se estudia en la escuela, las palabras "punto", "recta", etc., conllevan determinadas connotaciones, que se refieren a las conocidas figuras geométricas, pero la validez de las proposiciones es completamente independiente de esas connotaciones.

Supongamos, que en la Geometría Axiomática a que nos estamos refiriendo, sustituimos los términos de "punto", "recta", "incidencia", "estar entre", etc., por los términos neutrales "elemento de la clase 1", "elemento de la clase 2", "relación número 1", "relación número 2", etc., e introducimos también estos cambios en el sistema de axiomas de la estructura; supongamos además que presentamos estas modificaciones del sistema de axiomas de la Geometría a un matemático o lógico competente, desconocedor en lo absoluto de la naturaleza de los objetos primitivos. Para este lógico, todas las demostraciones seguirían siendo válidas, porque una demostración matemática rigurosa se basa en la deducción a partir exclusivamente de los axiomas, sin ninguna referencia a las interpretaciones habituales de los distintos conceptos matemáticos usados. Otra razón fuerte es, que su definición se realizaría en función de otros términos que a su vez tendrían que ser definidos, siguiéndose así una cadena que nunca tendría fin.

Como consecuencia de todo lo que precede, no puede decirse que una teoría matemática, afirme la verdad de sus axiomas, puesto que éstos se formulan en términos de conceptos sin significación específica; por esta razón, precisamente, los axiomas no hacen ninguna afirmación particular que puede llamarse verdadera o falsa. En la terminología de la lógica moderna, los axiomas no son sentencias, sino funciones sentenciales con los conceptos básicos como variables de argumento. Lo visto muestra también que los axiomas no pueden considerarse como "verdades autoevidentes", por cuanto si no se afirma nada, tampoco puede pretenderse autoevidencia alguna.

Podemos realizar por lo menos tres preguntas importantes relacionadas al sistema de axiomas:

1ra. ¿Implica el sistema de axiomas de la estructura teoremas contradictorios? Si así ocurre, hay que eliminar este defecto para podernos fiar de los teoremas. *Problema de la consistencia, compatibilidad o libertad de contradicción*.

2da. ¿Es adecuado el sistema de axiomas a los fines que se han formulado?; en nuestro caso, ¿si el sistema es lo suficientemente rico en axiomas para que de ellos se deriven lógicamente el resto de los enunciados verdaderos? *Problema de la completitud o categoricidad*.

3ra. ¿Son los axiomas realmente independientes; esto es, son algunos de ellos demostrables a partir de los demás?, caso en el cual deberían tal vez eliminarse del sistema y pasarse al cuerpo de teoremas por demostrar. *Problema de la independencia o minimalidad*.

Puesto que estos problemas surgen al estudiar cualquier sistema de axiomas, tiene sentido enunciar de manera general el planteo de los problemas indicados, así como los métodos para su resolución.

1ro. *Analicemos el problema de la consistencia:* Esta característica es de obligatorio cumplimiento, ya que un sistema de axiomas que la posea, es tal, que en la teoría que se desarrolle a partir del mismo no pueden deducirse resultados contradictorios.

Pero, ¿cómo podemos decir si un sistema de axiomas es consistente o no? Es posible imaginar que consigamos demostrar a partir del sistema de axiomas dado, dos teoremas que se contradigan el uno con el otro, con lo que podemos concluir que el sistema de axiomas no es consistente.

Pero, suponiendo que eso no ocurra, ¿cómo podemos concluir que el sistema de axiomas es consistente?; ¿cómo podemos decir que, si continuamos enunciando y demostrando teoremas, no vamos a llegar en algún momento a enunciados contradictorios y, por tanto, a una inconsistencia? Difícilmente podemos alcanzar un punto en el que podamos decir con confianza que no pueden afirmarse más teoremas. Y, a menos de tener todos los teoremas posibles ante la vista, todos los teoremas que puedan contradecirse, ¿cómo podemos decir que el sistema de axiomas es consistente?

Otra dificultad puede surgir del hecho de que acaso sea difícil reconocer que hay una contradicción implicada, aún en el caso de que efectivamente se dé. Hay casos de sistemas en los cuales se había empleado mucho tiempo y estudio y que solo más tarde manifestaron su inconsistencia. Así nos encontramos directamente con el siguiente problema: ¿Existe algún procedimiento para demostrar que un sistema de axiomas es consistente?

El análisis de la consistencia de un sistema axiomático es una cuestión por lo general muy complicada; por eso, a fin de demostrar la consistencia de un sistema dado de axiomas, basta hallar alguna de sus posibles realizaciones, ya que si estos axiomas pueden ser realizados de alguna manera en el modelo, entonces será imposible deducir de ellos, con razonamientos correctos, dos resultados que se excluyan mutuamente desde el punto de vista lógico, tales como, digamos, la afirmación y la negación de un mismo teorema.

Cuando se desarrolla suficientemente una teoría, si no se encuentra contradicción en las proposiciones obtenidas, se tiene una relativa tranquilidad con respecto a la consistencia, pero nunca una certeza; es más, como demostró Kurt Gödel en 1931, en el interior de una teoría es imposible demostrar que la misma está libre de contradicción. Lo más que puede lograrse es demostrar la llamada consistencia relativa de un sistema de axiomas. Veamos qué significa esto. Supongamos que se tiene una teoría matemática T suficientemente desarrollada como para estar casi convencidos de que ella es consistente. Si, utilizando los conceptos de esa teoría, podemos construir un modelo de la teoría cuya consistencia queremos determinar (llamémosla teoría T'), entonces, por las consideraciones hechas, podemos garantizar que si la teoría T es consistente, entonces también lo es la teoría T'.

Así, el modelo analítico de la Geometría euclideana nos dice que es consistente la Geometría de Euclides, si lo está la teoría de los números reales.

La consistencia de la Geometría plana de Lobachevski es demostrada construyendo el modelo de Poincaré, cuyos elementos son tomados de un plano euclideano, de manera que el plano de Lobachevski es uno de los semiplanos determinados por una recta cualquiera del plano euclideano, los puntos de Lobachevski son los puntos euclideanos de este semiplano y las rectas de Lobachevski son las semicircunferencias euclideanas que se encuentran en el semiplano de los puntos de Lobachevski y son ortogonales a la recta borde del semiplano y a las semirrectas euclideanas del plano de Lobachevski que tienen origen en la recta borde y son ortogonales con ella.

De manera análoga sucede con la Geometría plana de Riemann al establecerse su consistencia si interpretamos el plano de Riemann como la superficie de una esfera euclídea, el punto como cada par de puntos diametralmente opuestos de esa superficie y la recta a cada circunferencia máxima de la esfera. Hemos presentado dos modelos cuyos elementos han sido tomados de la Geometría de Euclides y se puede probar que los axiomas de la Geometría de Lobachevski y los de la Geometría de Riemann, son interpretados por dichos modelos. Esto significa entonces que la Geometría de Lobachevski y la Geometría de Riemann no son consistentes, si no lo es la Geometría euclideana.

2do. *Analicemos el problema de la completitud*: El concepto de completitud está íntimamente relacionado con el concepto de isomorfismo de estructuras. Definamos pues estructuras isomorfas.

Dos estructuras son *isomorfas*, si entre los elementos de estas se puede establecer una correspondencia biyectiva tal, que los elementos correspondientes se encuentran en relaciones mutuas análogas. Diremos entonces que un sistema de axiomas es completo si y solo si cada dos interpretaciones del sistema son isomorfas.

Los grandes éxitos en la axiomatización de diferentes disciplinas han dado origen a la concepción del carácter limitado del método axiomático. En realidad, el proceso de axiomatización tiene sus límites y fronteras en la misma. Por ejemplo, K. Gödel en sus famosos metateoremas, teorema de las metamatemáticas o de la teoría de la demostración, prueba que en un sistema formal lo suficientemente desarrollado, pueden formularse expresiones que siendo proposiciones del sistema en cuestión, no son demostrables en él, como tampoco lo son las negaciones de estas proposiciones. Según Gödel, de esta forma se afirma la incompletitud de principio de los sistemas axiomáticos formalizados, de lo cual se desprende la imposibilidad de construir un sistema axiomático general de toda la Matemática.

3ro. *Analicemos el problema de la independencia*: Un axioma de un sistema se dice que es independiente del resto, si el mismo no puede ser demostrado como teorema utilizando los axiomas restantes.

Para demostrar la independencia de un axioma con respecto al resto, se construye un modelo en el cual se toma como axioma la negación de éste, de forma tal que se obtenga una teoría

libre de contradicción. Así, el descubrimiento de la Geometría no euclideana de Lobachevski demostró la independencia del axioma de las paralelas del resto de los axiomas de la Geometría euclideana.
Podemos determinar de otra manera la independencia de un axioma dentro de un sistema, si verificamos que en algún modelo podemos interpretar los demás axiomas a excepción de éste. Si en un sistema axiomático, todos los axiomas son independientes, entonces se dice que el sistema de axiomas es minimal. Esta característica es deseable, pero por razones de claridad, la mayoría de las veces se consideran sistemas no minimales.

La efectividad de las abstracciones matemáticas depende de los logros en su utilización en otras ciencias y en la práctica. La necesidad de esta exigencia fue claramente admitida por uno de los mas grandes matemáticos de este siglo e iniciador de la fundamentación formalista de la Matemática, David Hilbert: "Si junto con la demostración de la no contradicción puede tener sentido todavía el problema de la validez de cierta actividad matemática, entonces el problema puede ser reducido solo al siguiente, ¿acompaña a esta actividad el correspondiente éxito o no? En efecto, el éxito es aquí imprescindible; él constituye la última instancia ante la cual todo se subordina".

CONCLUSIONES

La experiencia investigativa actual de muchos matemáticos evidencian la necesidad de utilizar todos los métodos posibles de razonamiento y movilizar todas las capacidades psíquicas y habilidades para el hallazgo de la verdad. El matemático que en su investigación se aferre a un solo método o a ciertos tipos de métodos empobrece sus posibilidades creativas. Se deben conjugar los distintos métodos: deductivos, inductivos, estadísticos, analógicos, intuitivos y constructivos. Por esto, la metodología de la Matemática debe considerar los métodos del conocimiento científico en su interrelación dialéctica. El método axiomático, por tanto, constituye solamente una de las formas de la elaboración deductiva de los conocimientos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

1. Blaguier, M. (1970). Sistemas formales y sus modelos. En Revista Pensamiento Crítico (La Habana). No. 47, p.29-41.

2. Cuba. Academia de Ciencias. Metodología del conocimiento científico / Academia de Ciencias de Cuba; Academia de Ciencias de la URSS. -- La Habana : Ed. de Ciencias Sociales, 1978. -- 445 p.
3. García Garrido, L. (1970). Sistemas, modelos y teorías.. En Revista Pensamiento Crítico (La Habana). No. 47, p.17-28.
4. Guetmanova, A. (2010). Lógica. Moscú: Progreso, 363 p.
5. Guetmanova, A. (2010). Lógica: en forma simple sobre lo complejo / A. Guétmanova, M. Panov, V. Petrov. Moscú: Progreso. 304 p.
6. Rosental, M. (1973). Diccionario Filosófico / M. Rosental, P. Iudin. -- La Habana: Política. 498p.
4. Hernández Sampieri, R. [et,al] (2008). Metodología de la Investigación. Colombia : Ed. Panamericana Formas e Impresos S.A. 505 p.
8. Kedrov, B. M. (1996). Clasificación de las ciencias. Moscú: Progreso, t. 2.
9. Sánchez Fernández, C. (2011). Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la Matemática. La Habana: Universidad de La Habana. 207 p.
10. Sánchez Fernández, C. (2011). Problemas filosóficos y metodológicos relacionados con la matematización de las ciencias. En Filosofía y Ciencia. -- La Habana: Ciencias Sociales. p. 188-214.