



**ORIGINAL**

Recebido: 23/07/2021 | Acetado: 31/10/2021

**Engenharia Didática para a visualização da sequência de Padovan por meio do software Geogebra.**

**Didactic Engineering for the visualization of the Padovan Sequence Through the Geogebra Software.**

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro [[carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br](mailto:carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br)]   
*Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática. Professor efetivo.*  
*Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE). Fortaleza-Ceará, Brasil.*

Francisco Régis Vieira Alves [[fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br)]   
*Doutor em ensino da Matemática. Professor efetivo.*  
*Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE). Fortaleza-Ceará, Brasil.*

### **Resumo**

A ausência do estudo da Sequência Padovan no ensino de História da Matemática nos cursos de licenciatura motivou a realização desta pesquisa, dada a particularidade provocante de suas relações. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática que viabilize a compreensão desta sequência por meio de sua visualização geométrica com arrimo do *software* GeoGebra, a partir de uma situação didática de ensino. Para sua estruturação, a metodologia utilizada neste trabalho foi a Engenharia Didática, em suas duas primeiras fases – análises preliminares e análise a priori – com o amparo da Teoria das Situações Didáticas. A visualização da Sequência de Padovan com aporte do *software* Geogebra, a partir da prova visual através da área do triângulo equilátero, tem potencial para desenvolver nos estudantes em formação inicial uma compreensão de suas propriedades, bem como fornecer subsídios para compreendermos as limitações e dificuldades deste estudo, sendo elementos componentes de uma possível análise a posteriori e continuação desta pesquisa no curso do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.



## **Abstract**

The absence of the study of the Padovan Sequence in the teaching of History of Mathematics in undergraduate courses motivated this research, given the provocative particularity of their relationships. Thus, the objective of this work is to present a didactic proposal that enables the comprehension of this sequence through its geometric visualization with the support of the Geogebra software, from a didactic teaching situation. For its structuring, the methodology used in this work was Didactic Engineering, in its first two phases – preliminary analysis and a priori analysis – with the support of the Theory of Didactic Situations. The visualization of the Padovan Sequence with the contribution of the GeoGebra software, from the visual proof through the area of the equilateral triangle, has the potential to develop in students undergoing initial training an understanding of its properties, as well as providing subsidies to understand its limitations and difficulties. study, being components of a possible a posteriori analysis and continuation of this research in the course of the Master in Science and Mathematics Teaching.

**Palavras-chave:** sequência de padovan; geogebra; engenharia didática; teoria das situações didáticas.

**Keywords:** padovan sequence; geogebra; didactic engineering; theory of didactic situations.

## **Introdução**

Ao longo dos séculos, a Matemática é uma ciência que foi construída, sendo desenvolvida a partir de necessidades e desejos que respondam certos questionamentos e atendam às necessidades da sociedade. De acordo com o pensamento de Schmidt, Pretto e Leivas (2016, p. 42) é possível perceber que “os objetos matemáticos são construções sociais, históricas



e culturais desenvolvidas por métodos específicos de pensamento que contribuem de forma específica para o desenvolvimento das sociedades”.

No âmbito escolar é comum a matemática ser mostradas aos estudantes sem levar em consideração o seu processo histórico e a origem de seus conceitos, sobrepondo técnicas e/ ou métodos de cálculo sem nenhum pensamento sobre seus conhecimentos, para possíveis aplicações. Não obstante, para que o estudante compreenda e desenvolva o raciocínio matemático “é necessário que o aluno tenha desenvolvido a habilidade de fazer deduções e construir elementos essencialmente abstratos, utilizando-se de conhecimentos prévios de forma combinada” (Sousa, Azevedo e Alves, 2021, p. 361).

Diante dessas informações, observa-se as dificuldades na compreensão da Matemática, no que diz respeito ao processo investigativo e histórico dos conteúdos. Tais fatores fortalecem a importância do estudo da disciplina História da Matemática, como suporte à compreensão da natureza e criações científicas dos mais variados tipos assuntos da Matemática.

Assim, tem-se o interesse de abordar a sequência de Padovan, pouco mencionada na literatura de ensino e, conseqüentemente, com escassez de trabalhos em torno da mesma (Alves, 2016a, 2016b; Alves e Dias, 2017; Alves e Catarino, 2018; Vieira e Alves, 2020). Essa abordagem proporciona aos estudantes um contato com algumas identidades matemáticas, a fim de serem exploradas por alunos na disciplina de História da Matemática, em um curso de formação inicial de professores. Em uma perspectiva futura, pretendemos desenvolver esta situação didática dentro da pesquisa de campo durante o curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, para posterior coleta de dados e análise.

Dessa maneira, a problemática dessa pesquisa é justificada pela pergunta norteadora: como desenvolver um estudo sobre a sequência de Padovan, realizando situações didáticas de



ensino que ocasione a investigação de definições e propriedades matemáticas, explorando o *software* GeoGebra numa perspectiva epistemológica?

Com isso, o objetivo geral torna-se desenvolver um estudo acerca da prova visual das identidades da sequência de Padovan, por meio de uma situação didática de ensino com base nas duas primeiras fases da Engenharia Didática (ED).

Pretendendo atingir o objetivo deste trabalho, adota-se como metodologia a Engenharia Didática (ED) Clássica, com o amparo da Teoria das Situações Didáticas (TSD), pois estas, de forma articulada, fazem um elo entre teoria e prática em sala de aula, de maneira sistematizada. Alves e Dias (2019, p. 2) apontam que a ED é um método que traz “a opção por uma perspectiva sistemática de preparação, de concepção, de planejamento, de modelização e, possivelmente, a execução e/ou replicação de sequências estruturadas de ensino”, o que se busca construir neste estudo. Já a Teoria das Situações Didáticas (TSD), é uma teoria de ensino, que estuda as práticas alusivas ao conhecimento e as relações existentes entre aluno, professor e o saber, bem como suas interações vivenciadas em sala de aula (BROUSSEAU, 1986).

Assim, na seção seguinte há uma breve exploração sobre o GeoGebra, o *software* escolhido para as manipulações. Em seguida, visando realizar uma preparação, organização e concepção de sequências didáticas de ensino, há a aplicação da ED nas duas primeiras fases, sabendo que a primeira, análise preliminar, está relacionada a um estudo dos referenciais teóricos referente ao objeto de estudo matemático, ou seja, a sequência de Padovan fazendo uma análise da construção do conteúdo de forma didática, cognitiva e epistemológica.

Já na segunda fase, análise *a priori*, elabora situações didáticas de ensino, visando possíveis comportamentos dos estudantes durante o processo. Durante a construção das situações didáticas é desenvolvida uma situação problema, amparada pela Teoria das Situações Didáticas



(TSD), descrevendo os elementos importantes de uma possível situação que envolve a didática , utilizando recursos computacionais com o intuito de demonstrar algumas propriedades por meio do *software* GeoGebra, em uma visualização em 2D, propondo ao processo de ensino e de aprendizagem uma interação a partir do controle das ações desenvolvidas, durante o processo de estudo, de uma maneira gradual de acordo com a necessidade do estudante (Ribeiro e Souza,2016). Com isso, será utilizado nesse trabalho esse *software* para uma melhor compreensão da situação- problema proposta.

Por fim, discute-se elementos que podem subsidiar uma análise a posteriori desta proposta, bem como as considerações dos autores.

### **GeoGebra**

O GeoGebra é um *software* livre e de fácil manipulação, sendo disponibilizado em diversos idiomas, tendo recursos que possibilita a estimulação da construção do conhecimento do estudante. Pensando nisso, surge a ideia de utilizar o GeoGebra como ferramenta para a construção da situação didática, com o objetivo de melhorar a percepção do estudante durante a demonstrações de forma visual das identidades da sequência de Padovan.

Segundo Ribeiro e Souza (2016), o *software* GeoGebra é uma ferramenta dinâmica, que propõe ao processo de ensino e de aprendizagem uma interação a partir do controle das ações desenvolvidas durante o processo de estudo, de uma maneira gradual e de acordo com a necessidade do estudante.

Dessa forma, essa ferramenta tende a dinamizar a geometria, podendo manipular os objetos através da tela do computador ou de aparelhos celulares. Além disso, “incentiva a continuidade da busca pela compreensão do objeto de estudo, pois o próprio *software* auxilia na



percepção visual e dinâmica das ações, que são manipuláveis com certo grau de permissividade” (Ribeiro e Souza,2016, p.3).

Portanto, a criação da situação didática se utiliza do raciocínio das fases da TSD e organizada pela ED, que tem como propósito ajudar o estudante e o professor nas demonstrações visuais das identidades da sequência de Padovan. Dessa forma, o docente terá como construir um percurso a ser percorrido pelo aluno, identificando as possíveis soluções e obstáculos encontrados durante esse processo. Desse modo, na seção seguinte aborda-se o referencial teórico necessário para uma análise preliminar da sequência de Padovan.

### **Análise Preliminar**

A fase inicial da ED, segundo Artigue (1995), tem como objetivos analisar a epistemologia do conteúdo explorado nesta pesquisa, analisar os obstáculos do processo de ensino, verificar as concepções e os conhecimentos prévios dos estudantes.

Dessa forma, durante essa fase o professor promoverá um diálogo com os alunos, de uma tal maneira em que os mesmos irão construir o próprio conhecimento, com base nos conteúdos abordados em sala de aula. Para que isso aconteça, se deve relacionar alguns elementos necessários para prever as ações dos estudantes, como o estudo da organização matemática e uma observação das identidades da sequência de Padovan.

Dessa maneira, observa-se primeiramente a origem dos conceitos matemáticos abordados, compreendendo as definições e teoremas, bem como os obstáculos encontrados durante o processo (Artigue,1995). Já no outro momento, observa-se as construções utilizando o *software* GeoGebra, para uma demonstração visual das identidades, identificando os obstáculos para prever o possível comportamento do estudante durante a construção.



Assim, outra ideia que se destaca é a de Almouloud (2007) que defende que determinados assuntos são negligenciados durante o estudo da História da Matemática, ficando de fora do currículo visto pelos estudantes e que são conteúdos importantes. Pode-se citar como exemplo a sequência de Fibonacci, na qual serve de apoio para a sequência de Padovan e de suas identidades. Com isso, surge interesse em explorar esse assunto, constatando as propriedades por meio de demonstrações visuais.

Dessa forma, é “possível verificar os obstáculos epistemológicos, com base no conteúdo de Matemática escolhido, este deve ser demonstrado em lento processo de avanços e retrocessos” (Pais,2011, p.49). No entanto, o plano pedagógico deve ser bem elaborado, pois realizará uma investigação durante o processo em torno do conteúdo matemático.

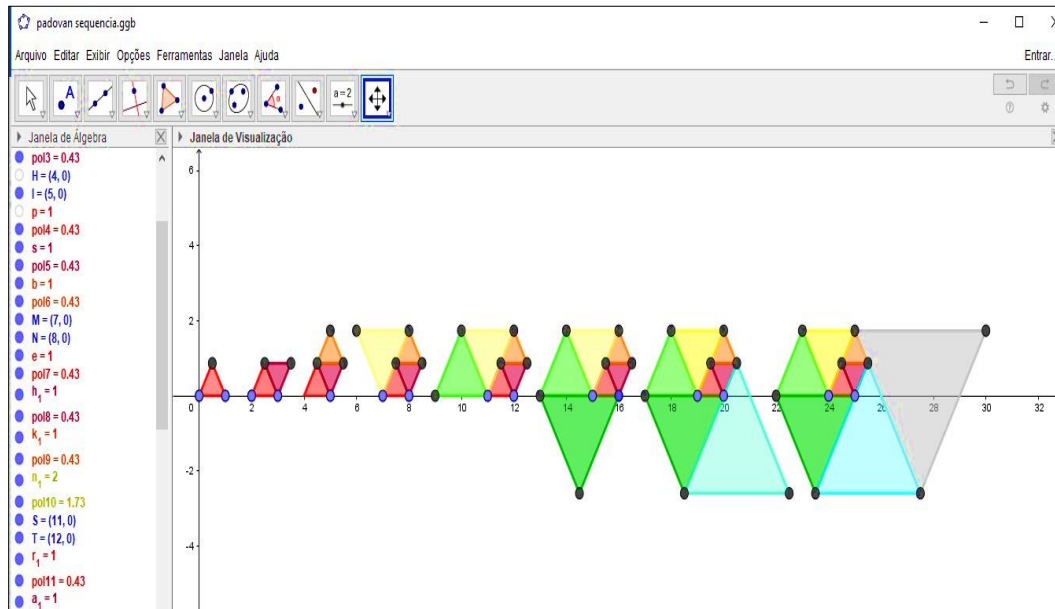
Portanto, conclui-se que, durante essa fase, a experiência do professor e o domínio do conteúdo são essenciais para a elaboração da situação didática, baseando-se no conteúdo matemático que será explorado neste trabalho. Assim, a partir dos estudos investigativos sobre o ensino da sequência de Padovan, serão estudados os aspectos históricos, definições e teoremas a serem trabalhados durante a pesquisa.

### **Sequência de Padovan**

A sequência de Padovan foi criada pelo italiano e arquiteto Richard Padovan (1935-?). Essa sequência se assemelha a sequência de Fibonacci, por ser aritmética, linear e recorrente (Stewart,2000). Uma das representações mais significativas de Fibonacci é a imagem de uma espiral, no qual os comprimentos dos quadrados correspondem a cada termo da sequência de Fibonacci. Assim, a sequência de Padovan também demonstra semelhança pela construção de uma espiral através de polígonos regulares; no caso utiliza-se triângulos equiláteros conforme a Figura 1.



**Figura1.** Sequência de Padovan dos oitos primeiros termos.



Fonte: elaborado pelos autores (2021)

Observando a Figura 1, percebe-se que os comprimentos dos lados dos triângulos equiláteros produzem a sequência de Padovan representada por:

**Definição1:** sequência de Padovan é definida pela lei de recorrência

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \quad n \geq 3 \text{ e } P_n \text{ é o } n\text{-ésimo termo da sequência.}$$

Segundo Edgar e Nacin (2021), existem fontes diferentes que usam várias condições iniciais para essa sequência, com base para construção da espiral, logo utiliza-se os termos iniciais como  $P_0 = 0, P_1 = P_2 = P_3 = 1$ . Os primeiros termos da sequência são:

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \dots$$

Dessa maneira, aborda-se a investigação das identidades de Padovan mais elementares, algumas são exemplos específicos de definições mais gerais que também possuem provas visuais (Edgar e Nacin, 2021).

**Teorema 1:** Para todo  $n \geq 3$ ,  $2P_n P_{n-2} = P_n^2 - P_{n-3}^2 + P_{n-2}^2$

**Teorema 2:** Para todo  $n \geq 4$ ,  $P_n^2 + P_{n-3}^2 + P_{n-4}^2 + 2P_{n-4}P_n + 2P_{n-3}(P_n + P_{n-4}) = P_{n+2}^2$





**Teorema 3:** Para todo  $n \geq 1$ , as seguintes identidades:

**Identidade 1.**  $1 + \sum_{k=1}^n P_{3k} = P_{3n+2}$ ;

**Identidade 2.**  $1 + \sum_{k=1}^{n-1} P_{3k+2} = P_{3n+1}$ ;

**Identidade 3.**  $1 + \sum_{k=1}^{n-1} P_{3k+1} = P_{3n}$ ;

Outra semelhança encontrada entre a sequência de Fibonacci e a de Padovan, são as equações  $x^2 = x + 1$  e  $x^3 = x + 1$ , respectivamente. Dessa maneira, a primeira equação é a representação do desejo de dividir um retângulo em um retângulo congruente menor e em um quadrado; já a segunda equação divide um quadrado em três retângulos congruentes e de tamanhos diferentes, gerando assim a razão áurea para a sequência de Fibonacci e o número plástico para a sequência de Padovan.

Assim, conforme relatam Edgar e Nacin (2021), os números de Padovan surgem de forma natural e as identidades podem ser provadas puramente através da geometria. Isso ampara a intenção desse trabalho, que é demonstrar os teoremas a partir de uma construção geométrica utilizando o *software* GeoGebra.

Por fim, na próxima seção aborda-se a análise *a priori* e a concepção da situação didática que norteia essa pesquisa.

### **Análise a priori**

Nessa fase, o professor terá que realizar uma ação monitorada, na qual a intervenção pode ocorrer de forma apropriada e no momento favorável, com o intuito de promover observações durante o processo investigativo dos estudantes. Assim, o docente fará o papel de mediador, prevendo as ações e comportamentos dos alunos, ajudando ou não o entendimento, procedendo de forma simultânea com os elementos de forma cognitiva, epistemológica e didática (Almouloud e Coutinho, 2008).



Alves (2014) relata que a situação didática é caracterizada quando o estudante consegue atingir o sucesso através de seu próprio esforço, mesmo ocorrendo alguma ajuda por parte do professor. Dessa forma, o docente faz o seu papel de mediador, promovendo o conhecimento lógico-matemático. Assim, o aluno recebe a situação-problema elaborada e o professor tende a supervisionar as atividades executadas, verificando se está ocorrendo a aprendizagem.

Nessa fase será elaborada uma situação didática de ensino, utilizando a sequência de Padovan e suas identidades, sendo amparada pela TSD, no qual a função do professor é observar os elementos que são essenciais durante as fases: ação, formulação, validação e institucionalização, conforme Brousseau (1996).

Teixeira e Passos (2013) relatam que, na fase da ação, o estudante faz a tentativa de resolver a atividade proposta; na formulação ocorrerá um diálogo entre o professor e o aluno, utilizando uma linguagem formal; na validação, os estudantes deverão convencer os participantes com suas informações encontradas durante o processo de resolução da tarefa; por fim, a institucionalização, as soluções e a intenção pedagógica da atividade proposta são reveladas pelo professor.

É importante destacar que, no momento inicial da análise, deve-se destacar a dimensão epistemológica associada a um contrato didático — ou seja, estabelecer algumas condições para a realização da situação didática. Já na dimensão cognitiva, se espera relacionar as características cognitivas do sistema de ensino, considerando as variáveis micro didáticas, sendo esses elementos que compõem a sala de aula com a organização da ED. Vale ressaltar que Artigue (1988) define como variáveis macro didáticas ou globais parte da organização geral da ED; as variáveis micro didáticas ou locais são relativas à organização de uma fase específica da engenharia.



Dessa forma, o professor deverá elaborar uma sequência de questionamentos, que ocorrerão durante a execução da situação didática e destacando o campo conceitual, de tal forma que os estudantes consigam apresentar soluções. Assim, o aluno será estimulado a agir, refletir e expressar de forma que ocorra uma evolução matemática por meio da situação didática.

Portanto, neste trabalho apresenta-se somente as duas primeiras fases da ED, bem como evidencia que análise *a priori* está amparada por algumas hipóteses investigativas, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta pedagógica, a fim de demonstrar as identidades geometricamente, com possíveis resultados em um curso de formação inicial de professores de Matemática.

### **Concepção e construção da situação didática**

Durante esse trabalho foram realizados estudos sobre as identidades da sequência de Padovan. A partir disso, baseados na definição e nos teoremas apresentados anteriormente, foi desenvolvida a situação didática, fundamentada pela TSD, com o objetivo de estimular os estudantes a desenvolver estratégias de soluções considerando seus conhecimentos prévios.

Situação-problema: Considerando a sequência de Padovan 0,1,1,1,2,2,3,4,5, 7..., e a sua relação de recorrência  $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$   $n \geq 3$ . Com base nos teoremas 1,2,3,4, como podem ser realizadas as provas visuais através de formas geométricas utilizando o *software* GeoGebra?

Na fase da Ação, é apresentado aos estudantes o problema para uma solução: a prova visual das identidades da sequência de Padovan, por meio do *software*, observando quais os comandos a serem executados com suas funcionalidades, e a definição para a sequência de Padovan. Nesse momento, o estudante não precisa ter habilidade total sobre os comandos, pois esse não é o centro do problema. O objetivo é como a construção ocorre, como ocultar alguns

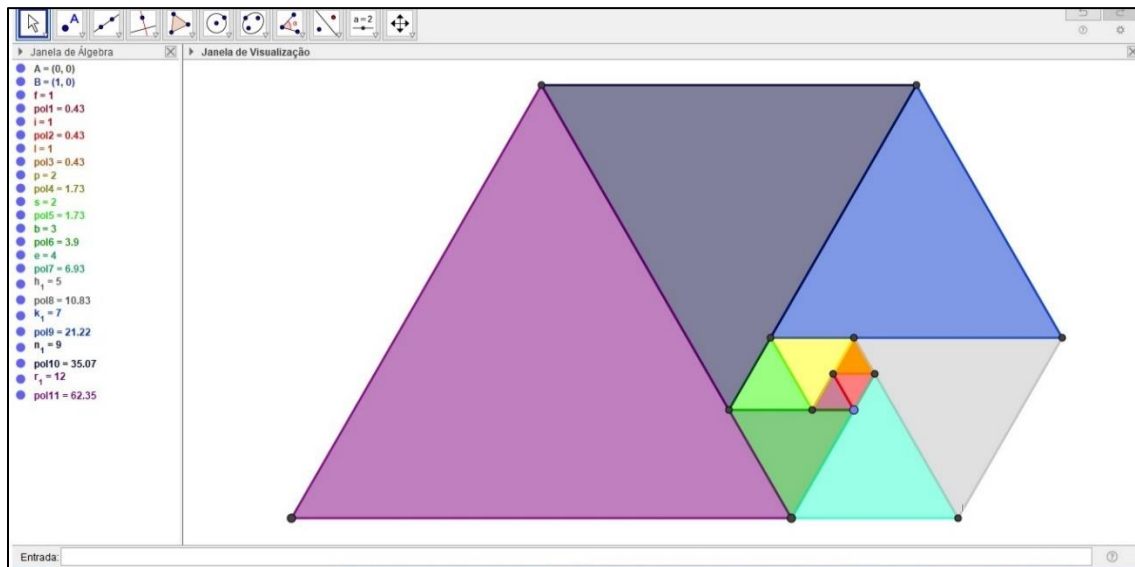


rótulos ou como acrescentar valores dentro das figuras, fazendo assim uma assimilação das informações das ações que serão desenvolvidas.

Na fase da formulação, espera-se que os estudantes, diante da situação-problema, identifiquem a relação de recorrência da sequência de Padovan e, conseqüentemente, como essa pode ser construída utilizando o software. Nesse momento, é possível que os alunos identifiquem que a posição em que se encontram os triângulos é a que se faz a construção do formato da espiral.

Assim, os estudantes podem fazer anotações que não necessariamente tenham observações matemáticas, pois é possível ocorrer o esquecimento ao longo da manipulação do *software* para construir a sequência. Logo, os testes que possam ser realizados com essa ferramenta podem gerar a Figura2:

**Figura 2.** Sequência de Padovan com 11 termos.



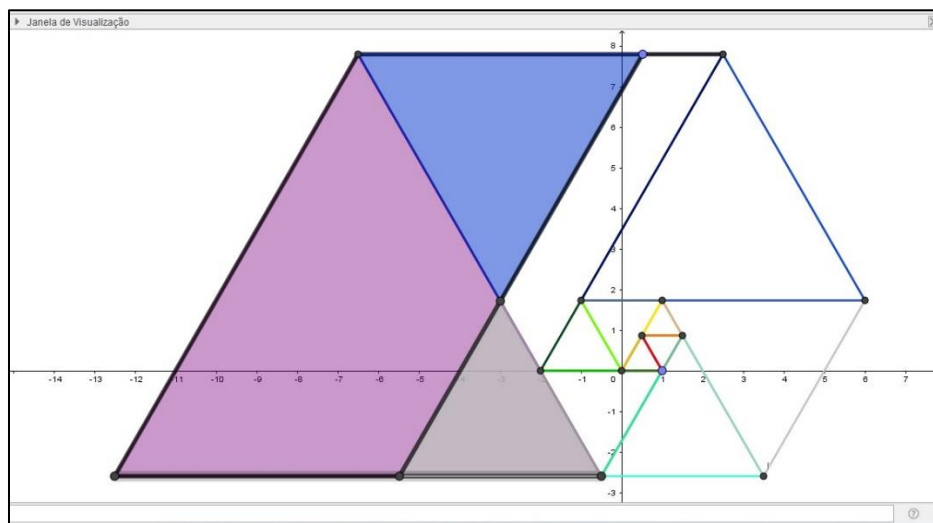
Fonte: Elaborada pelos autores (2021).

Essa figura é uma ideia de como representar os termos da sequência de Padovan por meio de triângulos equiláteros, com a possibilidade de ressaltar que a espiral possa ser construída em outro sentido.



Na fase da validação deseja-se que os estudantes tenham entendido que as construções partem de alguns princípios, como: a maioria das provas visuais envolve áreas e comprimentos de altitudes de triângulos equiláteros; conseqüentemente, para melhorar o processo deve-se apresentar uma constante que será utilizada sempre que for necessário. Para facilitar a notação, define-se  $c = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ; fazendo a altitude de um triângulo equilátero com comprimento lateral  $s$  igual a  $2cs$  e sua área igual a  $cs^2$ : Além disso, a área de um paralelogramo com comprimento lateral  $s$  e altitude perpendicular  $2ch$  é dado por  $2csh$ . Assim, de acordo com essas informações, os estudantes estarão capazes de construir as possíveis provas visuais que serão apresentadas a seguir:

**Figura3.** Prova visual do Teorema1.



Fonte: Elaborada pelos autores (2021).

Na Figura 3, utiliza-se a Figura 2 como base dessa construção, translada-se o triângulo que corresponde o termo 8, para dentro da imagem que corresponde ao termo 11, bem como transladando o termo 9 para dentro da figura que corresponde o termo 10. Logo o somatório da área preenchida será igual ao somatório da área dos termos não preenchido. Assim, tem-se a prova da seguinte forma:

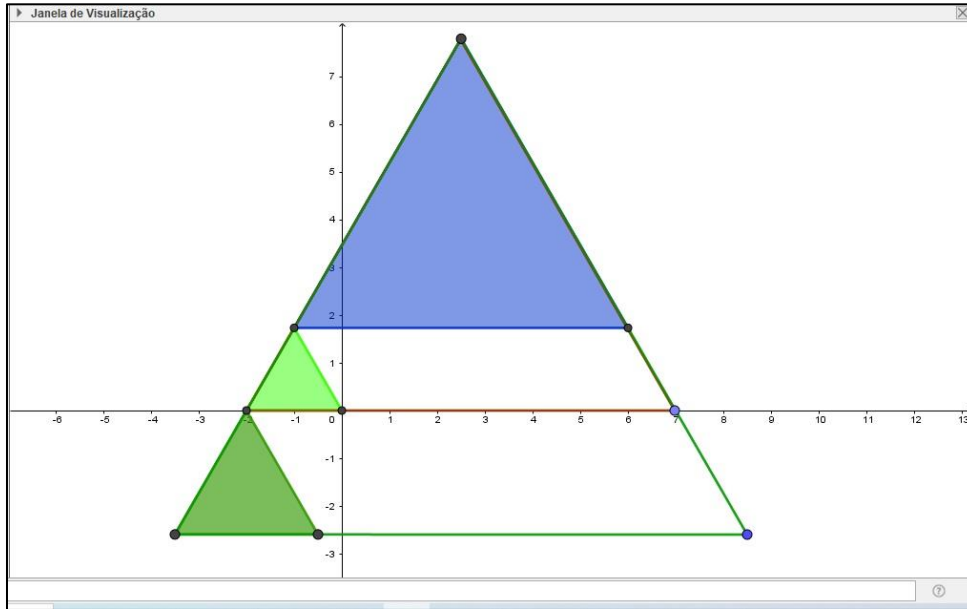


$$2cP_nP_{n-2} = cP_n^2 - cP_{n-3}^2 + cP_{n-2}^2$$

$$= c(P_n^2 - P_{n-3}^2 + P_{n-2}^2).$$

Dessa maneira, construir a prova visual do Teorema 2, também se utiliza a Figura 2 como base para construção, conforme a Figura 4:

**Figura 4.** Prova visual do Teorema 2.



Fonte: Elaborada pelos autores (2021).

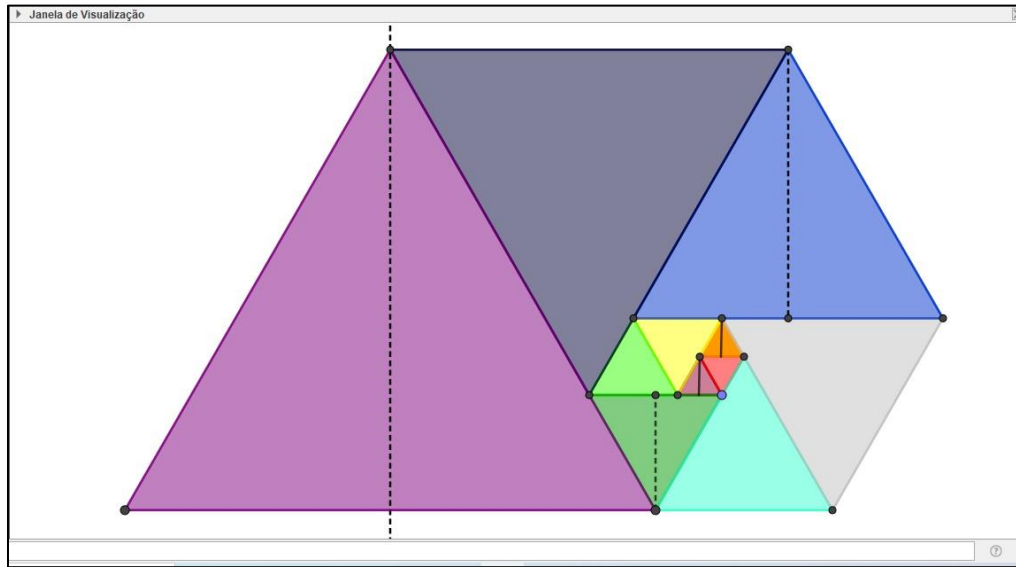
Na Figura 4, percebe-se que foi criado um novo triângulo equilátero, com as imagens que correspondem aos termos 5, 6 e 9. Logo, tem-se a seguinte demonstração:

$$cP_n^2 + cP_{n-3}^2 + cP_{n-4}^2 + 2cP_{n-4}P_n + 2cP_{n-3}(P_n + P_{n-4}) = cP_{n+2}^2.$$

Continuando a utilização da Figura 2 para a construção da prova visual do Teorema 3, e de suas identidades, conforme a Figura 5:



**Figura 5.** *Prova visual do Identidade1.*

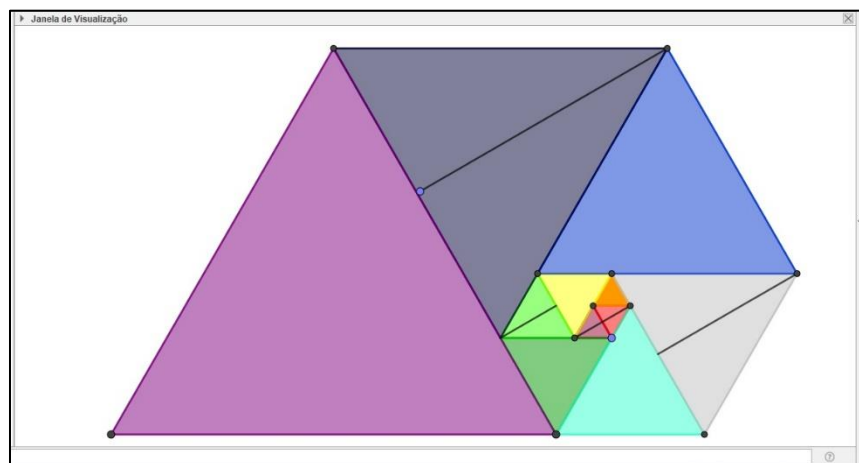


*Fonte: Elaborada pelos autores (2021).*

Na Figura 5, traçam-se retas perpendiculares nas imagens que correspondem os termos 1,3,6, 9,11 com o intuito de provar a identidade 1 do Teorema 3.

Usando novamente a Figura 2 como base, faz-se a prova visual da Identidade2 do Teorema 3, conforme a Figura 6.

**Figura 6.** *Prova visual do Identidade2.*



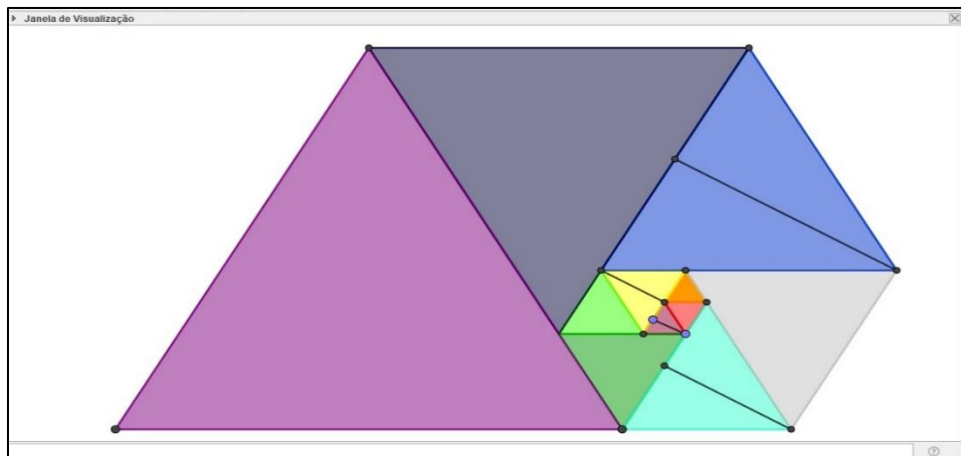
*Fonte: Elaborada pelos autores (2021).*



Na Figura 6, traçam-se retas perpendiculares nas imagens que correspondem aos termos 1,2,5,8 e 10, provando a identidade<sup>2</sup> do Teorema 3.

Por fim, utilizando novamente a Figura 2 como base, faz-se a prova visual da Identidade<sup>3</sup> do Teorema 3, conforme a Figura 7.

**Figura 7.** Prova visual do Identidade<sup>3</sup>.



Fonte: Elaborada pelos autores (2021).

Na Figura 7, traçam-se retas perpendiculares nas imagens que correspondem aos termos 1,4,7 e 9, provando a identidade<sup>3</sup> do Teorema 3.

Conclui-se as possíveis provas visuais dos quatro teoremas propostos. Dessa forma, na fase da institucionalização, que é a fase da TSD, o professor entra em ação — ou seja, ele se expressa, com o objetivo de traçar uma direção didática, que explica a construção do conhecimento explorado pelos estudantes, fazendo intervenções e observações sobre o que não tenha sido abordado durante o processo pelos alunos.

Nesse momento, o professor pode optar em fazer as demonstrações numéricas de cada identidade, explicando os procedimentos metodológicos que poderiam ter sido seguidos pelo estudante, fazendo uma síntese do conteúdo abordado. Por fim, na próxima seção, aborda-se alguns elementos para uma possível análise *a priori*.





### **Elementos para uma possível análise a priori**

Nessa fase da ED, são coletados os dados obtidos da observação da situação problema. Como nesse caso essa situação não foi aplicada, mas não deixa de ser importante para o processo, relaciona-se alguns elementos para uma possível análise a *priori*, amparada pela TSD.

Uma das possíveis dificuldades encontradas pelos estudantes durante a aplicação da situação problema é a transposição do conteúdo matemático para o software, tendo em vista que a manipulação não era fator preponderante para a realização da atividade. Nesse momento, os estudantes devem entender que a construção dos termos da sequência de Padovan será através da criação de triângulos equiláteros, e que cada figura corresponderá a cada um termo dessa sequência.

Porém, por falta de conhecimento em relação às ferramentas do GeoGebra, os estudantes podem se sentir inseguros durante a construção. Assim, o professor pode deixar bem claro que há outros sentidos para construção da espiral.

Os estudantes também podem sentir dificuldades em encontrar um padrão para solução da situação problema — ou seja, na hora de construir ou modificar as figuras — tendo em vista que as construções das identidades apresentadas são pouco conhecidas, bem como são utilizadas poucas palavras para tais demonstrações. Dessa forma, os alunos começam a compreender certos comportamentos quando iniciarem as construções para as provas visuais utilizando a ferramenta computacional.

### **Considerações Finais**

Nessa pesquisa, foi desenvolvida uma transposição didática envolvendo as provas visuais das identidades da sequência de Padovan, discutindo elementos importantes durante os ciclos de planejamento e preparação para o processo. Utilizando algumas características da sequência de



Fibonacci, pôde-se observar as semelhanças em sua definição, bem como outras características encontradas na sequência de Padovan, na qual não é muito explorada no currículo estudado na História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática.

Assim, a ED foi escolhida como metodologia de pesquisa devido as dificuldades encontradas no processo de ensino e de aprendizagem, criando uma estratégia para o planejamento dos professores, dando a importância a esses conteúdos matemáticos a que se referem as sequências de recorrência. Diante disso, apresenta-se a sequência de Padovan e suas identidades, tendo em vista que ela não está presente em livros da História da Matemática, mesmo sendo semelhante a sequência de Fibonacci.

Durante esse trabalho foi discutida na análise preliminar, o contexto histórico e a definição da sequência de Padovan e seus teoremas, mostrando uma alternativa de provar em poucas palavras as identidades através do *software* GeoGebra. Assim, na fase da análise *a priori*, foi elaborada uma situação problema, abordando alguns teoremas propostos, sendo validadas por meio das construções geométricas e utilizando conceitos matemáticos. Ademais, são evidenciados os aspectos históricos e epistemológicos que podem servir para um estudo mais complexo, em uma disciplina de curso de formação inicial para professores de Matemática, apresentando uma ementa dessa disciplina da História da Matemática mais apropriada.

Dessa forma, acredita-se que o objetivo de repassar aos estudantes a compreensão dos procedimentos históricos e matemáticos devem ser adquiridos através dessas duas metodologias, aplicadas durante a construção do processo. Assim, os professores podem repassar aos alunos, em sala de aula, as definições iniciais, ocorrendo alterações e possíveis adaptações durante a aplicação da situação problema.



Desse modo, apesar de não receber a devida atenção por autores, a sequência de Padova pode ser considerada um tema propício para o desenvolvimento do estudo de sequências lineares recorrentes, bem como a convergência entre termos consecutivos de tais sequências. Contudo, neste estudo exigimos um diferencial ao docente de Matemática, que é uma abordagem no campo da História da Matemática aliada ao uso da tecnologia.

O GeoGebra possibilita a construção e visualização destas sequências a partir de visualizações bidimensionais, sendo um recurso com grande potencial para explorar e discutir as características e relações entre essas sequências tanto por uma perspectiva algébrica quanto geométrica. Além disso, elencamos, de forma breve, alguns elementos que podem subsidiar uma análise *a posteriori* a partir do desenvolvimento desta situação didática em sala de aula.

Desse modo, conclui-se que as metodologias de ensino e de pesquisa foram aplicadas com o intuito que houvesse a criação de uma situação didática usual, voltada para educação, facilitando a compreensão por parte dos estudantes no processo de ensino e de aprendizagem.

É importante ressaltar que esse trabalho apresenta as duas primeiras fases da ED, não abrangendo outras etapas, assim podendo ser posteriormente aplicadas com os alunos. As outras fases não serão prejudicadas e podem servir de base para o desenvolvimento de outras ideias de práticas utilizando a sequência de Padova em trabalhos futuros.

### **Referências bibliográficas**

Almouloud, S. A. (2007). Fundamentos da Didática da Matemática. São Paulo: *Editora UFPR*.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. *Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions*, 9(3),281-308.



- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. Gomez, P. *Ingeniería didáctica em Educacion Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Cap.4, 33-61.
- Almouloud, S. e Coutinho, C. Q. S. (2008) Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1), 62-77. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>.
- Alves, F. R. V. (2014). Engenharia didática para o teorema da função implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 7(3),148-168 DOI: 10.3895/S1982-873X2014000300010.
- Alves, F. R. V. e Dias, M. A. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 12(2), 192-209. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2017v12n2p192>.
- Alves, F. R. e Catarino, P. M. (2018). Engenharia Didática de 2º Geração com o tema:  $h(x)$ -Polinômios de Jacobsthal. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista*, 8(3),28-55. DOI:10.31512/encitec.v8i3.2357.
- Brousseau, G.(1986). *La relation didactique: Le milieu*. Paris: Actes de la IVème Ecole d'Eté.
- Brousseau, G. (1996). *Fundamentos e métodos da Didáctica da Matemática*. In: BRUN, Jean. (Org.). *Didáticas das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. 35-113.
- Edgar, T. e Nacin, D. (2021). A Visual Tour of Identities for the Padovan Sequence. The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC,



part of Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/s00283-021-10076-8>. Acesso: jul.2021.

Pais, L. C. (2011). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, T.N e Souza, D.N. (2016). A Utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS) *Revisem*. (1),36 – 51. DOI: <https://doi.org/10.34179/revisem.v1i1.4507>.

Sousa, R. T., Azevedo, I. F. e Alves, F. R. V. (2021). Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas: um contributo ao ensino de Geometria Analítica com o software GeoGebra. *Revista Binacional Brasil-Argentina*, 10(1), 357-379. DOI: <https://doi.org/10.22481/rbba.v10i01.8447>.

Stewart, I. (2000). *Univers. des Nombres*. Paris: Belin pour la Science.

Teixeira, P. J. M., Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké*, 21(39), 155-168. DOI: <https://doi.org/10.20396/zet.v21i39.8646602>.

Vieira, R.P.M e Alves, F.R.V. (2020). Engenharia Didática e sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a priori. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 16(59),227-251. Recuperado a partir de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/63>.

