



ORIGINAL

Recibido: 17/03/2021 | **Aprobado:** 01/11/2021

Aprendizaje de un programa heurístico para la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

Learning of an Heuristic Program for the Transferring Between Representations of Analytic Geometry Objects.

Ortelio Nilo Quero Méndez [oquero@uniss.edu.cu] 
Doctor en Ciencias Pedagógicas. Prof. Titular.
Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. Sancti Spíritus, Cuba.

Aldo Medardo Ruiz Pérez [aldoruiz58@gmail.com] 
Doctor en Ciencias Pedagógicas. Prof. Titular.
Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. Sancti Spíritus, Cuba.

Resumen

El artículo contiene un resultado de una investigación pedagógica dirigida a favorecer el desempeño en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica de estudiantes que se forman como profesores de Matemática. Específicamente contiene una propuesta de programa heurístico para la resolución de problemas de este tipo y describe los procesos de elaboración y aplicación de este programa durante su aprendizaje en un pre-experimento pedagógico. En el artículo se describe, además, el procedimiento utilizado en la medición de la variable de estudio y se presentan datos que expresan los resultados alcanzados.

Palabras clave: programa heurístico; resolución de problemas; transferencia entre representaciones; geometría analítica; formación inicial de profesores.

Abstract

The article contains a result of a pedagogical research aimed at favoring the performance in the resolution of transfer problems between representations of objects of Analytic Geometry of students who are being formed as Mathematics teachers. Specifically, it contains a proposal of



a heuristic program for the resolution of problems of this type and describes the processes of elaboration and application of this program during its learning in a pedagogical pre-experiment. The article also describes the procedure used in the measurement of the study variable and presents data that express the results achieved.

Keywords: initial teacher training; analytical geometry; heuristic program; problem solving; transfer between representations.

Introducción

La representación de los objetos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) es un tema que ha acaparado la atención de investigadores en didáctica de la Matemática desde la segunda mitad del siglo XX. El primer trabajo académico que se reconoce sobre el tema es la tesis doctoral de Claude Janvier, acerca de las dificultades en la comprensión del concepto de función basada en representaciones gráficas, defendida en 1978 en la Universidad de Nottingham, Inglaterra (Janvier, 1978).

Los estudios de Janvier continuaron con la intención de extender a otros temas las ideas desarrolladas con las funciones. Los principales resultados de sus investigaciones en esta etapa se publicaron en 1987 en el libro titulado *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (Janvier, 1987).

Las investigaciones de Janvier tuvieron un gran impacto en la comunidad de investigadores en didáctica de la Matemática en Europa, América y otras partes del mundo y por esta razón la representación de los objetos matemáticos en el PEA se convirtió en un tema de interés en los programas de investigación.

El impacto de los resultados investigativos en los sistemas educativos de diferentes países se produjo en el propio siglo XX. Entre los más significativos están la inclusión de las



representaciones en los Principios y Estándares del Concilio Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, 2000) como uno de los cinco procesos matemáticos importantes y como contenido de evaluación en los proyectos internacionales de evaluación del aprendizaje TIMSS y PISA.

En Cuba, que en la segunda mitad del siglo XX predominó la didáctica de la Matemática con una marcada influencia de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática de la otrora República Democrática Alemana, la representación de los objetos matemáticos en el PEA no tuvo un estatus especial como en muchos otros países.

Este proceso se viene a tener en cuenta en los documentos sobre el PEA de la Matemática del Ministerio de Educación en el siglo XXI al incluirse en los lineamientos del enfoque metodológico de la asignatura como componente de la línea directriz Adiestramiento Lógico-lingüístico (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

Ello condujo a la necesidad de incluir el tema de las representaciones en los contenidos de disciplinas y asignaturas correspondientes a la formación inicial de profesores de Matemática. La tesis doctoral de Quero (2018) constituye una contribución a la satisfacción de esta necesidad en el PEA de la Geometría Analítica (GA).

Quero concibe el proceso de representación de un objeto de la Geometría Analítica como el proceso dirigido a obtener una representación del objeto y expresarla externamente, ya sea la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra (transferencia).

La actuación de los alumnos que se enfrentan a una tarea de enseñanza-aprendizaje que requiere transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica está influenciada por varios factores entre los cuales se incluye la familiaridad de los alumnos con la tarea, es decir, si han resuelto o no una tarea del mismo tipo o relacionada.



Cuando los alumnos desconocen el procedimiento de solución de la tarea y tienen interés en resolverla, esta se convierte en un problema de transferencia entre representaciones cuya resolución requiere del uso de recursos heurísticos.

Los autores de este artículo constataron que los estudiantes que se forman como profesores de Matemática presentaban las dificultades siguientes en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica:

- Particularización inadecuada del programa heurístico general a las condiciones y exigencias de los problemas de transferencia.
- Descomposición del problema inicial en subproblemas cuya resolución no conduce a la solución de este.
- Insuficiente control del proceso de resolución.

Para resolver esta situación problemática los autores decidieron aplicar métodos de la investigación pedagógica para buscar respuesta a la pregunta: ¿cómo favorecer el proceso de resolución de problemas de transferencia entre representaciones en el PEA de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática?

La investigación se dirigió a proponer un programa heurístico que sirva de recurso a los estudiantes. En este artículo se describe el programa y los procesos de su elaboración y aplicación durante su aprendizaje en un pre-experimento pedagógico.

Población y muestra

La unidad de estudio que se utilizó es el alumno que se forma como profesor de Matemática. La investigación se desarrolló en la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez” en un momento en que la matrícula de la carrera en la modalidad presencial contaba con



34 estudiantes de los cuales 13 no habían cursado la asignatura Geometría Analítica. Por esta razón, se seleccionaron estos 13 estudiantes para integrar la muestra.

Los estudiantes de la muestra pertenecían a los años segundo y tercero. Como la asignatura Geometría Analítica se cursa en el tercer año, el estudio se desarrolló durante dos cursos escolares: 2016-2017 y 2017-2018.

El carácter intencional del muestreo condujo a la utilización de métodos de la estadística descriptiva de análisis de datos, pues la estadística inferencial tiene entre sus requisitos el muestreo aleatorio.

La investigación de la cual se deriva este artículo puede caracterizarse como cuantitativa, experimental, prospectiva, longitudinal y descriptiva.

Según la intervención del investigador, se trata de una investigación experimental en que se utilizó el grupo-clase de estudiantes tal y como estaba constituido y mediante un pre-experimento se analizaron los cambios de la variable de estudio: el desempeño del alumno en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

Las mediciones de la variable de estudio fueron planificadas y los datos se recopilaron mediante instrumentos diseñados por los investigadores. Por esta razón, la investigación tuvo un carácter prospectivo, según la planificación de las mediciones.

La variable de estudio fue objeto de varias mediciones mediante observación, análisis de los productos del proceso pedagógico y varias pruebas. Debido a ello la investigación constituye un estudio longitudinal, según el número de mediciones.



Se utilizaron como variables de análisis: el desempeño del alumno en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica y el aprendizaje de un programa heurístico para hacerlo. Por esta razón la investigación es analítica.

Las dimensiones de la variable de estudio, los indicadores de cada dimensión, los criterios de medición y los métodos utilizados se describen en la sección correspondiente al análisis de los resultados.

Análisis de los resultados

1) Algunos conceptos importantes de la teoría de las representaciones.

Los tres conceptos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos son los de representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación.

Se llama representación de un objeto de la Geometría Analítica (objeto representado) al objeto material o mental (objeto representante), que lo sustituye y lo hace presente determinándolo de forma única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia. (Quero, 2018, p.16)

Para agrupar las representaciones de los objetos de la Geometría Analítica en tipos, se utiliza como criterio la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante. Los tipos considerados por Quero (2018) según este criterio son el verbal, el gráfico y el analítico. Los tipos se denotan con la letra mayúscula T con un subíndice.

Además del concepto de tipo de representación, en este artículo se utiliza como herramienta teórica el concepto de forma de representación para comparar dos representaciones de un mismo tipo, entendida como la configuración del objeto representante, de modo que dos



representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas. Las formas se denotan con la letra mayúscula F con un subíndice.

La idea esencial de la transferencia entre dos representaciones de un objeto geométrico O en el PEA considera que para O existen dos representaciones R_1 y R_2 , de las cuales una es conocida y la otra desconocida. El proceso que consiste en obtener la representación desconocida a partir de la conocida se llama transferencia entre esas dos representaciones. Por ejemplo, se sabe que para toda recta del plano existe una ecuación paramétrica (representación R_1) y una ecuación general (representación R_2). Si para una recta particular se conociera su ecuación general y se desconociera su ecuación paramétrica, el proceso mediante el cual se obtiene la ecuación paramétrica a partir de la ecuación general es la transferencia de R_2 a R_1 .

Para perfeccionar la idea anterior los autores consideraron, además, las formas respectivas F_1 y F_2 de las representaciones R_1 y R_2 , los respectivos tipos T_1 y T_2 de estas representaciones, los sistemas de coordenadas C_1 y C_2 utilizados en las representaciones R_1 y R_2 y los respectivos tipos τ_1 y τ_2 de estos sistemas de coordenadas. La definición resultante a partir de esta consideración es la siguiente:

Si O es un objeto de la Geometría Analítica, determinado por su representación R_1 en la forma F_1 del tipo T_1 correspondiente al sistema de coordenadas C_1 de tipo τ_1 y se desconoce su representación R_2 en la forma F_2 del tipo T_2 correspondiente al sistema de coordenadas C_2 de tipo τ_2 , el proceso mediante el cual se obtiene R_2 a partir de R_1 se llama transferencia de R_1 a R_2 . Si inversamente se conociera R_2 y desconociera R_1 , el proceso que permite obtener R_1 a partir de R_2 se llama transferencia de R_2 a R_1 . (Quero, 2018, p.20)



Cuando $C_1=C_2$ la transferencia se llama transferencia intrasistema, si en cambio $C_1\neq C_2$, esta se denomina transferencia intersistemas. Cuando $T_1=T_2$ la transferencia se llama transferencia intratipo, si en cambio $T_1\neq T_2$, esta recibe el nombre de transferencia intertipos (Quero, 2018, p. 20)

Si quien realiza la transferencia de R_1 a R_2 o de R_2 a R_1 no utiliza una tercera representación reconocida del objeto O como representación intermedia, la transferencia se llama directa. En otro caso la transferencia se llama compuesta (Quero, 2018, p.20)

La transferencia entre dos representaciones de un objeto de la Geometría Analítica es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice la obtención de una representación desconocida a partir de una conocida. A la primera se le llama representación dada (RD) y a la segunda, representación buscada (RB).

2) Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica.

Según Ballester y otros (1992):

El objetivo principal de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a las invenciones e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de las vías de solución a tareas de carácter no algorítmico (...). (p.226)

Entre los recursos heurísticos se encuentra el programa heurístico general (PHG), que es considerado por Torres (1993, p.17) como “la secuencia de acciones delimitadas por las etapas principales del proceso general de resolución de un problema matemático que reproduce la lógica misma de este proceso”.



La resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica (Teroga) está regida por los mismos factores y exigencias que la resolución de problemas de otros contextos, particularmente transcurre según las fases del programa heurístico general (Ballester y otros, 1992, p. 239) de forma específica, es decir, según un programa heurístico particular.

Quero (2018) concibió un programa de este tipo (Cuadro 1) a partir del programa heurístico general propuesto por Jungk (1978) y le incorporó un sistema de preguntas en calidad de sugerencias heurísticas (Cuadro 2). En lo adelante este programa se designa como PH-Teroga y el sistema de preguntas como SPCH.

Cuadro 1. *Fases fundamentales y acciones del PH-Teroga.*

Fases fundamentales	Acciones principales
Comprensión de la tarea de transferencia.	Reconocer que se trata de un ejercicio o problema de transferencia. Identificar la RD y la RB. Identificar el tipo y la forma de la RD y la RB. Identificar el tipo de transferencia a realizar (intrasistema o intersistemas, intratipo o intertipos). Representar simbólicamente la transferencia.
Elaboración de un procedimiento de transferencia	Determinar los medios a utilizar para realizar la transferencia. Decidir si se puede realizar una transferencia directa o es imprescindible realizar una transferencia compuesta. Elaborar un procedimiento de transferencia. Fundamentar el procedimiento.
Realización de la transferencia	Ejecutar el procedimiento de transferencia. Tomar decisiones ejecutivas.
Evaluación del proceso de transferencia	Comprobar si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado. Determinar si la representación obtenida es única. Determinar si existen otros procedimientos para realizar la transferencia. Valorar si el procedimiento aplicado se puede generalizar a todas las tareas del mismo tipo que la resuelta. Formular nuevos ejercicios o problemas de transferencia.
El concepto de decisión ejecutiva proviene de los trabajos de Schoenfeld (1985).	

Fuente: Quero (2018, p.77)



En este programa heurístico se particularizan, además, las decisiones ejecutivas formuladas por Schoenfeld (1985), referidas al control y las ideas de la cuarta etapa del modelo de resolución de problemas de Polya (1981).

Una particularidad del PH-Teroga es que incorpora el uso de software a la resolución de problemas de transferencia y no solo se centra en el empleo exclusivo de lápiz y papel como tradicionalmente se ha realizado el proceso. El uso de software también es una variable que interviene en la formulación de nuevos problemas porque los procedimientos de solución son diferentes con el cambio de los medios.

Una técnica muy útil para la formulación de nuevos problemas a partir de un problema conocido, es mediante la pregunta ¿qué pasaría si?

Esta técnica se puede utilizar incluso prescindiendo del contenido concreto del problema de transferencia. Por ejemplo, ¿qué pasaría si se intercambian la representación dada y la representación buscada?

Tal forma de proceder lleva a la formulación de un nuevo problema de transferencia que exige la transferencia inversa del problema original.

Otra técnica para la formulación de problemas a partir de un problema resuelto es la generalización. Si, por ejemplo, se da la representación verbal de una recta en el plano mediante dos puntos y un vector de dirección y se pide una representación verbal determinada por dos puntos, el problema se puede generalizar considerando un punto de coordenadas cualesquiera de la recta y un vector de dirección cualquiera para obtener una representación de esta recta determinada por dos de sus puntos.

También es una técnica útil para la formulación de nuevos problemas a partir de un problema resuelto el uso de la analogía. Por ejemplo, si se da la representación verbal de una



circunferencia determinada por el centro y el radio y se pide su representación gráfica, un problema análogo resulta al considerar dada una representación verbal de una esfera determinada por su centro y radio y entonces obtener su representación gráfica.

Cuadro 2. Preguntas con carácter heurístico por fases del PH-Teroga.

Fases fundamentales	SPCH
Comprensión de la tarea de transferencia.	¿Cuál es el objeto geométrico? ¿Se trata de una tarea de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica? ¿De qué tipo es la RD? ¿Qué forma tiene la RD? ¿Qué datos tengo de la RD? ¿De qué tipo es la RB? ¿Qué forma tiene la RB? ¿De qué tipo es la transferencia a realizar? ¿Cuál es la representación simbólica de la transferencia?
Elaboración de un procedimiento para la transferencia.	¿Debo realizar la transferencia con lápiz y papel o puedo utilizar un software? ¿Puedo pasar directamente de la RD a la RB? ¿Es útil obtener una representación intermedia? ¿Cómo puedo obtener la RB a partir de la RD? ¿Cómo justifico el procedimiento seguido?
Realización de la transferencia.	¿Qué hago para ejecutar cada paso del procedimiento? ¿Qué utilidad tiene el resultado parcial que obtengo al ejecutar cada paso?
Evaluación del proceso de transferencia.	¿Satisface la representación obtenida las exigencias de la tarea? ¿Cómo lo puedo comprobar? ¿Es única la representación obtenida? ¿Se pueden utilizar otros medios para realizar la transferencia? ¿Cómo procedo si utilizo otros medios? ¿El procedimiento aplicado se puede utilizar en todas las tareas del mismo tipo que la resuelta? ¿Existe otra forma de proceder utilizando los mismos medios? ¿Qué nuevas tareas puedo plantear a partir de la tarea resuelta?

Fuente: Quero (2018, p.78)

El carácter heurístico del sistema de preguntas está en que estas contribuyen a que los alumnos descubran con la ayuda del profesor las acciones a ejecutar para transferir de una representación a otra.



La resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica requiere del aprendizaje del PH-Teroga por parte de los alumnos. En la investigación este proceso se estructuró en las etapas de elaboración y aplicación que se describen en las secciones siguientes.

3) El proceso de elaboración del Programa Heurístico.

Por elaboración del PH-Teroga se entiende el proceso en que los estudiantes guiados por el profesor determinan y comprenden las fases de este programa, las acciones que las componen y las posibles heurísticas a utilizar en cada fase partiendo del programa heurístico general en el contexto de la resolución de tareas de aprendizaje.

El principal indicador que determina el final de la etapa de elaboración en un estudiante es que este pueda resolver tareas que exigen Teroga cuyo procedimiento de transferencia sea desconocido para él, sin necesidad de disponer en soporte material de las fases y acciones del Programa PH-Teroga ni de las preguntas del SPCH.

La elaboración del PH-Teroga presupone como condiciones previas del nivel de partida que los estudiantes conozcan las fases y acciones principales del programa heurístico general y se hayan apropiado de los conceptos que les propician la comprensión del concepto de transferencia.

Teniendo en cuenta la teoría del aprendizaje como una acción mental (Talízina, 1988) y las características propias de la elaboración del PH-Teroga se consideran tres etapas funcionales o momentos para este proceso: 1) configuración, 2) contextualización y 3) valoración y perfeccionamiento, las cuales transcurren según las funciones didácticas: A) aseguramiento del nivel de partida, B) motivación, C) orientación hacia el objetivo, D) elaboración del nuevo conocimiento, E) fijación y F) evaluación y control.



En el primer momento se particularizan las fases y acciones del PHG a la transferencia entre representaciones y se elabora una lista inicial de preguntas del SPCH; en el segundo momento los estudiantes resuelven tareas que exigen transferencia utilizando las pautas del PH-Teroga y en el tercer momento valoran la utilidad del PH-Teroga y lo perfeccionan con la experiencia adquirida en la resolución de cada tarea. En el tercer momento también se perfecciona el SPCH.

En la conformación de las tareas para elaborar el PH-Teroga se consideran las variables: 1) estudio previo por el estudiante del contenido matemático necesario para resolver la tarea, 2) tipo de transferencia a realizar y 3) estructura de la tarea según su exigencia.

Los valores a considerar de la primera variable son: 1.1) el alumno estudió el contenido o 1.2) el alumno no estudió el contenido.

Los valores a considerar de la segunda variable son: 2.1) transferencia directa-intratipo-intrasistema, 2.2) transferencia directa-intertipos-intrasistema, 2.3) transferencia compuesta-intratipo-intrasistema y 2.4) transferencia compuesta-intertipos-intrasistema. Los valores utilizados para la tercera variable son: 3.1) tarea de respuesta abierta o 3.2) tarea de completamiento.

Para determinar los tipos de tareas de transferencia entre representaciones, según estas tres variables y sus posibles valores, se aplicó la regla del producto de la combinatoria resultando 16 tipos de tareas que se utilizaron en el proceso de elaboración del PH-Teroga.

En el pre-experimento el primer momento del proceso de elaboración del PH-Teroga se inició con la intervención del profesor, quien recordó a los alumnos la utilidad que tiene el PHG en la resolución de problemas en el PEA de la Matemática y planteó la necesidad de elaborar un



programa heurístico particular para resolver problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la GA a partir del general.

Acto seguido el profesor entregó a los estudiantes una hoja con una tabla que contenía las fases y acciones principales del PHG y explicó que se pretendía particularizar las fases del PHG para el caso de las tareas de transferencia en que se desconoce el procedimiento a seguir. Pide a los alumnos sugerencias de nombres para las fases y escucha sus opiniones.

El profesor dirige la conversación de clase y cuando los estudiantes concluyen sus intervenciones, expone los nombres para cada fase. Entonces plantea la necesidad de determinar las acciones principales de cada fase y pide a los estudiantes que ofrezcan sus opiniones, organizando las intervenciones por fases del PHG. Al finalizar las intervenciones el profesor presenta un cuadro al estilo del Cuadro 1 con la idea de irlo enriqueciendo de forma individual y colectiva en el proceso de resolución de tareas que exigen Teroga.

El profesor explica la importancia de elaborar un sistema de preguntas que constituyan un sistema de reglas o sugerencias heurísticas las cuales favorezcan el proceso de transferencia y que se inserten en cada fase del programa. Solicita a los estudiantes preguntas para cada acción. Al concluir la conversación de clase el profesor entregó a los estudiantes una hoja con un cuadro al estilo del Cuadro 2 y explicó que este se iría perfeccionando y ampliando a partir de la experiencia en la resolución de tareas que exigen transferencia. Así terminó el momento de configuración.

El momento de contextualización transcurrió en la resolución de tareas de aprendizaje que exigían la elaboración de procedimientos de transferencia, bajo la dirección del profesor. Este momento se inició con una tarea en que se daba la representación verbal de una recta en el



plano determinada por un punto y un vector de dirección y se pedía una representación verbal de la recta determinada por dos puntos.

El perfeccionamiento de la versión inicial del PH-Teroga y del SPCH se fue realizando en el propio proceso de resolución de las tareas. Así cada alumno fue adaptando esta versión de acuerdo con su experiencia. La socialización de las experiencias individuales a nivel grupal sirvió para la creación de nuevas versiones del PH-Teroga y del SPCH que constituyeron el punto de partida para la etapa de aplicación.

4) La aplicación del Programa Heurístico.

Una vez concluida la etapa de elaboración se pasa a la de aplicación del Programa Heurístico. La aplicación del PH-Teroga ocurrió durante la resolución de tareas de aprendizaje que exigían transferencia entre representaciones y la resolución de estas tareas transcurrió según las funciones didácticas. Por ello comenzó en el trabajo independiente previo a cada clase práctica, continuó en la clase práctica y se extendió al trabajo independiente posterior.

Para la conformación de las tareas se tuvieron en cuenta las tres variables declaradas en la elaboración del PH-Teroga y se agregó la variable relativa al contexto de la tarea cuyos valores son: 4.1) contexto intramatemático o 4.2) contexto extramatemático. Al igual que en la etapa de elaboración se utilizaron tareas que exigían una transferencia cuyo procedimiento el estudiante desconocía.

Al aplicar la regla del producto de la combinatoria se obtuvieron 32 tipos de tareas en cuya resolución se podía aplicar el PH-Teroga. Estos tipos incluyen a los utilizados en la elaboración del PH-Teroga más otros que contienen tareas de contexto extramatemático.



En la aplicación del PH-Teroga se procuró buscar representatividad de estos 32 tipos de tareas con el objetivo de generalizar las versiones del Programa y del Sistema de Preguntas obtenidas al finalizar la etapa de elaboración.

5) Medición del desempeño de los alumnos en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

El pre-experimento aplicado corresponde a un diseño de grupo único solo con medida post-test en el cual no se comparan las mediciones entre sí, sino que se interpretan en relación con el cumplimiento del objetivo de aprendizaje que en este caso es resolver problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

La elección de este diseño responde a la misma naturaleza del PEA de la Geometría Analítica donde los alumnos realizan transferencias entre representaciones de objetos diferentes a medida que avanza el proceso y por esta razón las diferencias de las mediciones no pueden atribuirse solo a un único factor.

La variable de estudio de la investigación es el desempeño del alumno en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica.

El diseño de la medición de la variable de estudio se realizó según el procedimiento propuesto por Ruiz (2006): 1) definición de la variable, 2) determinación de las dimensiones y de los indicadores de cada dimensión, 3) modelación de los indicadores mediante variables estadísticas, 4) establecimiento de los criterios de medición de los indicadores y su representación en matrices de valoración, 5) diseño de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad y 6) diseño de la medición de las dimensiones y de la variable.



La definición del desempeño del alumno en la resolución de problemas de transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica se fundamenta en el concepto de desempeño cognitivo introducido por investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (Puig, 2003) y se define como el sistema de acciones que el alumno ejecuta durante esta actividad.

Las dimensiones consideradas para esta variable se corresponden con las fases del PH-Teroga: 1) comprensión de la tarea de transferencia, 2) elaboración de un procedimiento de transferencia, 3) realización de la transferencia y 4) evaluación del proceso de transferencia.

Los indicadores de cada dimensión aparecen en el Cuadro 3 y en su determinación se tuvieron en cuenta las acciones correspondientes a cada fase del Programa Heurístico.

Cuadro 3. *Indicadores de las dimensiones de la variable de estudio.*

Dimensión	Indicador
Comprensión de la tarea de transferencia	1. 1. Identificación del tipo de la RD y la RB.
	1.2. Identificación de la forma de la RD y la RB.
	1.3. Identificación del tipo de Teroga a realizar.
Elaboración de un procedimiento de transferencia	2.1. Esbozo de un procedimiento para la Teroga
	2.2. Fundamentación del procedimiento.
Realización de la transferencia	3.1. Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.
	3.2. Ejecución del procedimiento con software.
Evaluación del proceso de transferencia	4.1. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.
	4.2. Determinación de si la representación obtenida es única.
	4.3. Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la Teroga.
	4.4. Formulación de nuevos ejercicios o problemas de Teroga.

Fuente: Quero (2018, Anexo 4)

Todos los indicadores se midieron utilizando escalas ordinales y los criterios para asignar el valor de cada escala se organizaron en matrices de valoración (López, 2020).



La medición de las dimensiones y de la variable de estudio se realizó de forma indirecta utilizando índices (medias ponderadas) con valores en el intervalo [0; 100]. De esta manera para cada dimensión, el índice correspondiente se obtiene como media ponderada a partir de los valores asignados a los indicadores de la dimensión en la medición y el índice correspondiente a la variable de estudio se obtiene como media ponderada de los índices correspondientes a las dimensiones.

Cuando un indicador se midió con varios ítems, el resultado de la medición del indicador se calculó como media ponderada de la medición del desempeño del alumno en los ítems utilizando como coeficientes de ponderación los niveles de desempeño cognitivo de estos.

La medición se realizó mediante observación, análisis de los productos del proceso pedagógico y con el método de pruebas.

Para analizar los datos correspondientes a la variable de estudio en la medición se utilizó una escala ordinal de cinco valores (muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto). Esta escala se construyó a partir de los posibles valores del índice correspondiente a la variable de estudio, según se indica en el Cuadro 4.

Cuadro 4. *Escala de medición de la variable de estudio.*

Intervalo para el valor del índice	Categoría
[0, 20)	Muy bajo
[20, 40)	Bajo
[40, 60)	Medio
[60, 80)	Alto
[80, 100]	Muy alto

Fuente: Quero (2018, Anexo 7)

El diseño de la medición permitió utilizar tablas de frecuencia y gráficos para analizar los datos al nivel de indicadores, dimensiones y variable de estudio.



El Cuadro 5 contiene las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas correspondientes a la última medición realizada a los 13 estudiantes de la muestra.

Cuadro 5. Resultados de la medición de los indicadores.

Indicador	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
1. 1. Identificación del tipo de la RD y la RB.	4	30,8	9	69,2	0	0
1.2. Identificación de la forma de la RD y la RB.	5	38,5	8	61,5	0	0
1.3. Identificación del tipo de Teroga a realizar.	5	38,5	7	53,8	1	7,7
2.1. Esbozo de un procedimiento para la Teroga	5	38,5	4	30,8	4	30,8
2.2. Fundamentación del procedimiento.	4	30,8	4	30,8	5	38,5
3.1. Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.	6	46,2	4	30,8	3	23,1
3.2. Ejecución del procedimiento con software.	6	46,2	5	38,5	2	15,4
4.1. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.	4	30,8	4	30,8	5	38,5
4.2. Determinación de si la representación obtenida es única.	7	53,8	6	46,2	0	0,0
4.3. Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la Teroga.	5	38,5	2	15,4	6	46,2
4.4. Formulación de nuevos ejercicios o problemas de Teroga.	7	53,8	2	15,4	4	30,8

Fuente: Elaboración propia.

Los indicadores con mayor número de estudiantes evaluados con la categoría de bajo son: esbozo de un procedimiento para la Teroga (2.1), fundamentación del procedimiento de transferencia (2.2), comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado (4.1), determinación de si existen otros procedimientos para realizar la Teroga (4.3) y formulación de nuevos ejercicios o problemas de Teroga (4.4).

En el Cuadro 6 se muestra la distribución de los alumnos en la medición de la variable de estudio según la escala del Cuadro 4. Para obtener esta distribución primero se calculó el índice correspondiente a la variable de estudio para cada alumno.



Cuadro 6. Distribución de los alumnos de la muestra por categorías en la medición de la variable de estudio.

Categoría	Cantidad	%
Muy bajo	3	23,1
Bajo	1	7,7
Medio	4	30,8
Alto	3	23,1
Muy Alto	2	15,4
Total	13	100

Fuente: Elaboración propia.

Es notable que 9 de los 13 estudiantes (69,2%) hayan tenido un desempeño en la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica ubicado en la categoría de desempeño medio o superior, lo cual resulta positivamente significativo en un proceso de resolución de problemas.

Conclusiones

1. La resolución de problemas que exigen transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica requiere de un programa heurístico particular que ayude a los estudiantes a transitar por las distintas fases de este proceso.
2. La estructuración del aprendizaje del Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica (PH-Teroga) en las etapas de elaboración y aplicación contribuye a mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas que exigen transferencia entre representaciones de estos objetos.



Referencias bibliográficas

- Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A.,... Torres, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (Tesis doctoral). University of Nottingham. Nottingham, United Kingdom.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.
- Jungk, W. (1978). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática I*. La Habana: Pueblo y Educación.
- López, J. C. (2020). *Rúbricas, evaluación más allá de la calificación*. Edukafé, Documentos de trabajo de la Escuela, No. 9. Cali: Universidad Icesi. Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/rubricas>.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematic*. Reston, Va.: NCTM.
- Polya, G. (1981) *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Ciudad de México: Trillas.
- Puig, S. (2003). *La medición de la eficiencia del aprendizaje de los alumnos. Una aproximación a los niveles de desempeño cognitivo* [versión electrónica]. ICCP. La Habana. Cuba.



- Quero, O. (2018). *La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática*. (Tesis de doctorado). Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. Sancti Spíritus, Cuba.
- Ruiz, A. M. (2006). Procedimientos y medios para relacionar constructos, dimensiones, indicadores y medición en la investigación pedagógica (curso post-evento). En A. China, J. Medina & I., Cabezas (Eds.), *Actas del Evento Provincial Pedagogía 2007*. ISP Silverio Blanco. Sancti Spíritus. Cuba.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Mir.
- Torres, P. (1993). *La enseñanza problémica de la Matemática del nivel medio general*. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”. La Habana.

