ROCA
REVISTA CIENTÍFICO - EDUCACIONAL
DE LA PROVINCIA GRANMA.

RPNS: 2090 | ISSN: 2074-0735

VOLUMEN 17 (2021)
Número 1 (enero-marzo)

REVISIÓN

Recibido: 04/05/2020 | **Aceptado**: 30/11/2020

Condicionamiento de las funciones reales de una variable en la modelación matemática.

Conditioning of a Variable Real Functions in Mathematic Modeling.

Andrés Adolfo González Aguilera. [agonzaleza@udg.co.cu]
Master en Ciencias de la Educación. Prof. Auxiliar.
Universidad de Granma. Bayamo, Cuba.

Ramiro Infante Roblejo. [rinfanter@udg.co.cu]
Doctor en Ciencias. Prof. Titular.
Universidad de Granma. Bayamo, Cuba.

Pedro Manuel Ricardo Zaldivar. [pricardoz@udg.co.cu]
Master en Nuevas Tecnologías. Prof. Auxiliar.
Universidad de Granma. Bayamo, Cuba.

Resumen

El objetivo del artículo es mostrar condiciones y relaciones que se deben tener en cuenta para seleccionar una función real de una variable real en el proceso de modelación matemática a situaciones problémicas en diferentes ramas del saber, las propiedades de funciones a delimitar son: el dominio; la imagen; la monotonía y los valores extremos. El trabajo de modelación a través de funciones (lineal, cuadrática y cúbica) se articula con las categorías económicas de: demanda; ingreso y costo, estudiadas en la carrera de Licenciatura en Contabilidad y Finanzas de la Universidad de Granma, Cuba. Se pondera la necesidad de atender la compatibilidad entre el proceso a modelar y la función matemática modeladora, con el empleo del método de análisis y síntesis.

Abstract

The objective of the present article is to demonstrate conditions and relationships that must be taken into account for selecting a real function of a real variable in the process of mathematical modeling of problem situations in different branches of knowledge, the properties of functions to be delimited are the following: the domain; the image; monotony and extreme values. The modeling work through functions (linear, quadratic and cubic) is articulated with the economic categories of: demand; income and cost, studied in the Bachelor's degree in Accounting and Finance at the University of Granma, Cuba. The need to attend to the compatibility between the process to be modeled and the mathematical modeling function is weighed, with the use of the analysis and synthesis method.

Palabras claves: modelo matemático; demanda; ingreso; costo; función lineal; función cuadrática; función cúbica.

Keywords: mathematical model; demand; entry; cost; linear function; quadratic function; cubic function.

Introducción

En todos los niveles educacionales donde se enseña la Matemática, y se estudien las funciones reales, estas son utilizadas como modelo para resolver problemas prácticos. En ocasiones se elaboran ejercicios y problemas, con la finalidad referida, sin profundizar todas las condiciones y restricciones.

En la Universidad de Granma las carreras que dentro de su plan de estudio tienen la disciplina de Matemática, la mayoría poseen asignaturas donde se estudian las funciones reales de una variable real, con ellas se calcula límite, derivadas e integrales, además de utilizarse para modelar problemas, en especial, referidos al contexto profesional enmarcado.

La disciplina Matemática, que posee asignaturas básicas y aplicadas, debe perfeccionar la contextualización o profesionalización de sus contenidos para contribuir directamente al modelo de profesional que se aspira, ante todo comprometido con la revolución y competente.

Según la Resolución ministerial 2/2018, que rige el trabajo metodológico en la educación superior, el trabajo interdisciplinar es una necesidad formativa integral para el futuro profesional, lo muestran los siguientes artículos de la misma.

"ARTÍCULO 26: ....El colectivo de disciplina tendrá como principales funciones:

d) Lograr un enfoque metodológico adecuado para el desarrollo de la disciplina siguiendo las indicaciones metodológicas y de organización del programa, teniendo en cuenta su contribución al cumplimiento de los objetivos generales de la carrera y a los del año en que se desarrollan sus asignaturas. Atender los vínculos intra, inter y transdisciplinarios, y la integración de las estrategias curriculares en sus contenidos.

...

ARTÍCULO 28: La preparación de la disciplina es el trabajo metodológico que realizan los profesores que integran este colectivo con el propósito de optimizar el proceso docente educativo de dicha disciplina en todos los tipos de curso. Su contenido se orienta hacia la construcción de una didáctica de la disciplina, apoyándose en las experiencias que se van acumulando como resultado del sistemático trabajo metodológico que se desarrolla y de los logros que se alcanzan en las investigaciones pedagógicas realizadas con este fin.

...

..., el colectivo de la disciplina debe determinar claramente, entre otros aspectos lo siguiente:

a) Las potencialidades que tiene la disciplina en la formación integral del estudiante, en particular en la formación y desarrollo de sentimientos y convicciones desde el aprendizaje de sus contenidos, necesarios para un responsable ejercicio de la profesión.

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

...

d) La precisión de los vínculos intra e interdisciplinarios que se han de lograr para preparar a los estudiantes en la solución de problemas profesionales con un enfoque integral.”

(Resolución 2/2018, p10-14)

¿Qué ocurre en la actualidad con la profesionalización de la Matemática? En ocasiones se presentan ejercicios o problemas donde en su solución el modelo para resolverlo se utiliza la ecuación de una función real, y esta no tiene todas las condiciones para representar la situación problémica. A continuación se presenta un ejemplo.

La ecuación $I=-3q^2+23q-14$ modela matemáticamente el ingreso que se obtiene en un mercado agropecuario, durante una semana, por concepto de venta de q quintales de un producto.

Una pregunta que plantea la situación problémica es determinar ¿cuántos quintales del producto se deben vender para obtener un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

En realidad a la función que modela el ingreso tiene un valor máximo absoluto, pero no debe representar esta categoría económica, porque, cuando no hay ventas el ingreso es cero, por tanto esa función no cumple con esa relación.

A continuación se analizarán algunas condiciones que se deben tener en cuenta para utilizar las funciones como modelo matemático, se ejemplificarán algunas categorías económicas, tales como: la demanda de un producto; el ingreso y el costo.

Desarrollo

Demanda de un producto

"La demanda puede ser definida como la cantidad de bienes y servicios que son adquiridos por consumidores a diferentes precios, a una unidad de tiempo específica, un día, un mes, un año, etc". (https://es.wikipedia.org/wiki/Demanda_economía).

Quiere decir: a cada nivel de los precios de un producto, existe una cantidad de ese producto que los consumidores están dispuesto a comprar en un período determinado. La relación de dependencia unitaria entre las variables precio y las unidades de producto demandadas, cumple con las características de la definición del concepto función, es lo que permite modelar matemáticamente esta categoría económica.

Económicamente la demanda o venta de un producto cumple determinadas condiciones:

- a medida que el precio aumenta la demanda (venta) disminuye;
- existe un precio tope de los productos, donde los consumidores no están dispuestos a comprar, esa condición genera que la demanda sea cero, no hay ventas;
- a un precio fijo, la demanda de un producto es constante.
- Las funciones que modelen la demanda deben cumplir las siguientes condiciones:
- deben ser, por lo general, monótonas decrecientes;
- su dominio e imagen restringido, la variable precio debe ser positiva y la variable que representa la demanda no negativa;
- según la condición anterior, la gráfica queda ubicada en el primer cuadrante y solo tiene intercepto con el eje que representa el precio.

A continuación se muestra un ejemplo de función lineal que represente la demanda.

$q = 700 - 2p$

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

q: unidades de producto demandadas o vendidas.

p: precio de cada unidad o precio unitario.

$0 \angle \mathrm{p} \leq \$350{,}00; 0 \leq q \angle 700$ (Fig. 1)

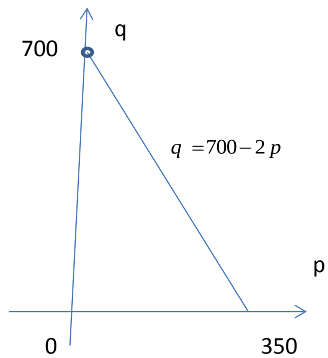

Figura 1. Gráfico de la función de demanda.

Ingreso por la venta de un producto

En contabilidad la definición de ingreso (ingreso total) a “la sumatoria de lo percibido por una organización o una empresa por motivo de su actividad comercial regular, es decir, al vender todos sus productos o servicios”. (https://concepto.de/ingreso-2/ 2020).

Según la definición, esta categoría económica depende fundamentalmente de variables cuantitativas. El ingreso se determina a través de la multiplicación de las unidades de producto(s) vendido(s) o servicio(s) prestado(s) por el precio unitario. Si se venden *q* unidades de producto a un precio por unidad *p*, entonces el ingreso total es *I* viene dado por $I = p \cdot q$.

El ingreso satisface las características de la definición de función, por su dependencia unitaria de las unidades de producto(s) vendidas y del precio por unidad, por lo tanto, puede modelarse a través de una función con una o dos variables independientes.

Económicamente el ingreso cumple determinadas condiciones:

- la cantidad de producto(s) o servicio(s) demando(os) o vendido(s) determina el ingreso a obtener;

- si no hay venta (demanda) no hay ingreso.
- Las funciones que modelen el ingreso deben cumplir las siguientes condiciones:
- la ecuación, el término independiente debe ser cero;
- la ecuación debe ser el resultado del producto de dos funciones;
- uno de los factores de la función resultante debe tener monotonía constante o decreciente;
- la gráfica debe estar ubicada en el primer cuadrante, teniendo en cuenta la no negatividad de las variables.

Ejemplos de ecuaciones de funciones que modelen el ingreso.

<u>Lineal</u>

$I = m \cdot q$

q: unidades de producto demandadas o vendidas.

m: precio de cada unidad o precio unitario, además, la pendiente de la función y asume un valor fijo.

$q \geq 0; \quad m \in Q_{+}^{*}$

Para este modelo el ingreso aumenta con el incremento de las ventas. (Fig. 2)

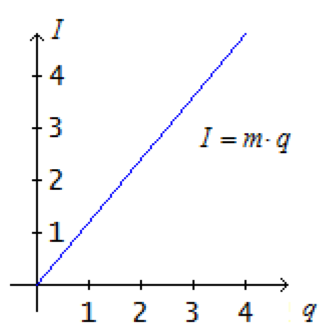

Figura 2. Gráfico de la función de ingreso.

Cuadrática

Primero se debe tener presente la ecuación de la función de demanda que constituye uno de los factores de la función de ingreso.

$q = 4 - \frac{1}{2}p$, ecuación de una función de demanda, que es monótona decreciente.

Si se despeja p se obtiene $p = 8 - 2q$: ecuación de la función de precio, luego

$I = pq = (8 - 2q)q$

$I = 8q - 2q^2$: *ecuación de la función de ingreso*

$\bar{I} = \frac{I}{q} = 8 - 2q$: ecuación de la función de ingreso promedio o por unidad

q: unidades demandas, $0 \leq q < 4$

I: ingreso total, $I \geq 0$

p = $\bar{I}$ > 0: precio unitario o ingreso promedio

Para obtener la función que modele el ingreso, se debe tener presente que la venta depende del precio o ingreso promedio y debe estar representada por una función monótona decreciente, además, se necesita la ecuación del ingreso marginal o derivada del ingreso para determinar la monotonía y el valor máximo en la función de ingreso.

$\frac{dI}{dq} = I_m = 8 - 4q$: ecuación de la función de ingreso marginal

Una observación importante es que la pendiente de la función de ingreso marginal es el doble respecto a la función de ingreso promedio y ambas tienen el mismo término independiente. (Fig. 3)

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

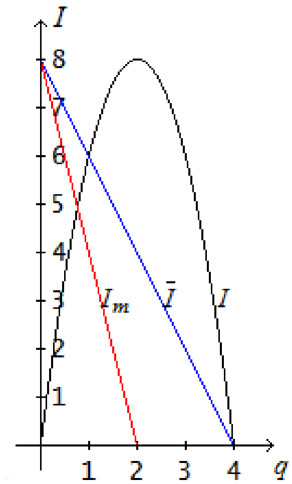

Figura 3. Gráfico de las funciones de: ingreso marginal (I_m); ingreso promedio ($\bar{I}$) ingreso (I)

Cúbica

Para que la ecuación $I = \dfrac{36q - q^3}{15}$ **,** represente a la función de ingreso se debió determinar la ecuación del ingreso promedio $\bar{I} = \dfrac{36 - q^2}{15}$, bajo la condición de que es monótona decreciente en el primer cuadrante, con la restricción: $0 \le q < 2$, además se debe conocer la ecuación de la función de ingreso marginal $I_m = \dfrac{36-3q^2}{15}$, para tener presente la monotonía y el valor máximo de la función de ingreso. (Fig. 4)

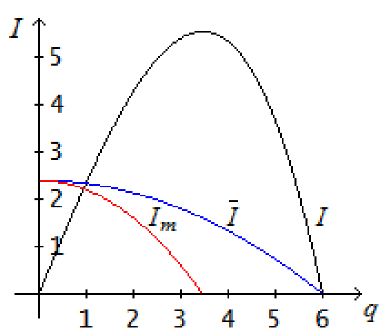

Figura 4. Gráfico de las funciones de: ingreso marginal (I_m); ingreso promedio ($\bar{I}$); ingreso (I)

Costo de producción

En la Resolución 935-2018, se define costo: "expresa la magnitud de los recursos materiales, laborales y monetarios necesarios para alcanzar un cierto volumen de producción o prestación de servicio, con una determinada calidad" (p.32).

Según Polimeni y Fabozzi (1997), el costo, también se define como "el valor sacrificado para adquirir bienes o servicios" (p.53).

Según las definiciones anteriores, donde se asocia el costo al gasto económico, y teniendo en cuenta la finalidad de este trabajo, el costo se definirá como función a depender de la variable volumen de producción o prestación de servicio, además, será expresada como función de costo total C, de producir y comercializar q unidades de un producto, se analiza bajo una dependencia unívoca de q, así, considerarlo una función representada por la ecuación $C = f(q)$.

La categoría económica Costo tiene un perfil amplio dentro de la economía, en la carrera de Contabilidad y Finanzas constituye una disciplina, luego, desde este trabajo no es posible ver la modelación matemática de cada una de las especificidades de los diferentes tipos de costos que se estudian. La teorización y la ejemplificación serán apoyados respecto al costo total.

Económicamente el costo cumple determinadas condiciones:

- puede dividirse como la adición del costo variable, que depende del volumen de producción o prestación de servicio (q), y el costo fijo, que no depende de la producción o del servicio prestado (q);
- comúnmente a medida que se incrementa la producción (q) aumenta el costo total (C).

El costo total de producción o servicio al modelarse matemáticamente a través de una función, la misma debe cumplir determinadas condiciones:

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

- si la ecuación de la función se divide en la adición de una parte literal, esta representará el costo variable, con una constante que representará el costo fijo;
- la mayoría deben ser monótonas crecientes;
- la gráfica debe quedar ubicada en el primer cuadrante;
- se debe garantizar que al costo promedio o el costo por unidad se le pueda calcular el valor mínimo.

Ahora se ejemplificará el análisis anterior.

Función de costo lineal

$C = mq + n$: ecuación del costo total, donde *m*, *n* >0, *C* >0

$c_v = mq$: costo variable

$c_f = n$: costo fijo

q: unidades a producir o servicio a prestar, $q \geq 0$

$\overline{C} = \frac{C}{q} = m + \frac{n}{q}$: costo promedio, costo medio o por unidad

$\frac{dC}{dq} = C_m = m$: costo marginal

Es una necesidad, más en los momentos actuales, que se determine el costo mínimo para producir una unidad de producto, por tanto, se debe proceder con la derivada al costo promedio (el costo marginal medio).

$\frac{d\overline{C}}{dq} = = -\frac{n}{q^2}$, esta función no tiene ceros, luego la función que representa el costo por unidad, $\overline{C} = m + \frac{n}{q}$ no tiene valor mínimo, pero si es una hipérbola equilátera decreciente, ubicada en el primer cuadrante, y tiene una asíntota horizontal, $C_m = m$ a la cual se acerca a medida que se incrementan las unidades producidas q.

Se puede concluir que para el modelo de función lineal el valor mínimo del costo por unidad es *m* (Fig. 5).

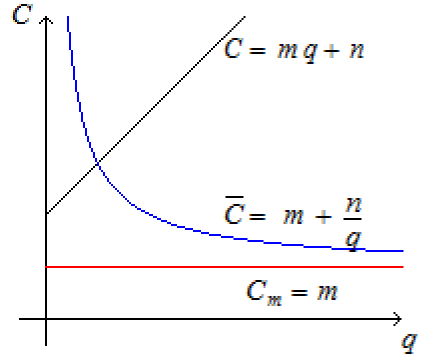

Figura 5. Gráfico de las funciones de: costo (C); costo promedio ($\overline{C}$); costo marginal (C_m)

Función de costo cuadrática

$C = aq^2 + bq + c$ **:** ecuación del costo total, donde a >0, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $C > 0$

$c_v = aq^2 + bq$: costo variable

$c_f = c$: costo fijo

q: unidades a producir o servicio a prestar, $q \geq 0$

$\overline{C} = \frac{C}{q} = aq + b + \frac{c}{q}$: costo promedio o costo por unidad

$C_m = 2aq + b$: costo marginal

$\frac{d\overline{C}}{dq} = a - \frac{c}{q^2} = \frac{aq^2 - c}{q^2} = \frac{qC_m - C}{q^2}$: costo marginal promedio

Para hallar el valor mínimo al costo por unidad se le debe hallar el cero al costo marginal promedio.

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

$\frac{d\overline{C}}{dq}=0$ luego $aq^2-c=0$ por tanto $qC_m-C=0$, entonces $C_m=\frac{C}{q}=\overline{C}$,

$C_m=\overline{C}$, se llega a la conclusión que el valor mínimo del costo por unidad coincide con el punto de intersección entre la función de costo marginal y la función de costo por unidad.

$q_{\min}=\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{\sqrt{ac}}{a}$, $\overline{C}_{\min}=2a\sqrt{\frac{c}{a}}+b=2\sqrt{ac}+b$. Luego el punto $A\left(\frac{\sqrt{ac}}{a};2\sqrt{ac}+b\right)$ es el mínimo de la función de costo por unidad (Fig. 6).

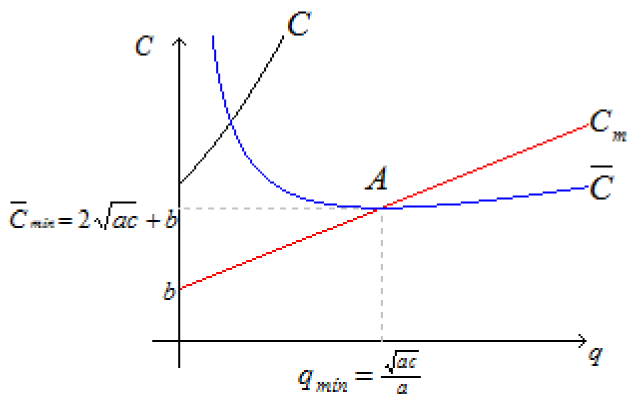

Figura 6. Gráfico de las funciones de: costo (C); costo promedio ($\overline{C}$); costo marginal (C_m)

Conclusiones

1. Para utilizar una función real, como modelo matemático, que represente la relación entre variables cuantitativas en un proceso económico o de otra ciencia, se deben conocer todas las particularidades del mismo y así obtener una aproximación con un menor nivel de error.
2. La función real escogida para modelar un proceso debe tener todas las condiciones y restricciones que posibilite la realización en ella de operaciones de la Matemática Superior, derivación, integración.

Universidad de Granma. Bayamo MN, Cuba.
Carretera de Manzanillo Km 17 ½ Bayamo. Granma. Cuba. C.P. 85100.
https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca

Referencias Bibliográficas

Haeussler, E. F. (1989). Matemáticas para Administración y Economía. Quinta Edición. México: Ibero América.

https://es.wikipedia.org/wiki/Demanda_(economía).

https://concepto.de/ingreso-2/.

Martínez, E. y otros. (1990). Matemática Superior. Tomo I. Universidad de La Habana. La Habana.

MES (2018). Reglamento de trabajo docente y metodológico de la Educación Superior. Resolución No. 2/2018. Gaceta Oficial de la República de Cuba. 647-709. http://www.gacetaoficial

Polimeni, Ralph S, y F. J. Fabozzi. (1997). Contabilidad de Costos. Tercera Edición. Santafé de Bogotá: M Edna.

Resolución No. 935/2018. Norma Específica de Contabilidad de Gestión. Edición Ordinaria. La Habana.

Swokowski, E. W. (2003). Cálculo con Geometría Analítica. Tomo I. Segunda Edición. La Habana: Félix Varela.