REVISIÓN

Tratamiento de los criterios de divisibilidad para la Educación Primaria.

MSc. Rafael de Jesús García Sánchez, Asistente. [rgarcias@udg.co.cu]
Universidad de Granma. Cuba.

Lic. Julio Quesada Izquierdo, Asistente. [jquesadai@udg.co.cu]
Universidad de Granma. Cuba.

Dr.C. Ninfa Socarrás Rodríguez, Prof. Titular. [nsocarrasr@udg.co.cu]
Universidad de Granma. Cuba.

Resumen

Los criterios de divisibilidad en la enseñanza de la Matemática desempeñan un importante papel en el estudio de la Aritmética que se realiza en la Educación Primaria, estos son utilizados para simplificar fracciones, para investigar si un número dado es primo o no, entre otras aplicaciones. A partir del estudio realizado por varios autores se pudo apreciar que algunos desarrollan este contenido utilizando la congruencia aritmética que no se estudia en la enseñanza primaria cubana y otros no lo hacen con el rigor científico necesario. Por otra parte, en los libros de textos de Matemática no se explicita un tratamiento metodológico adecuado que les permita a los estudiantes la apropiación consciente y profunda de este contenido, lo que constituye el objetivo de este trabajo. En él se realiza un estudio de la relación de divisibilidad en los números enteros, el cual se puede reducir fácilmente a los números naturales; donde se define y ejemplifica dicha relación, se enuncian o demuestran sus propiedades necesarias para obtener o demostrar una considerable cantidad de criterios de divisibilidad, se ejemplifican algunos de estos y se ilustra una de sus aplicaciones a la resolución de ejercicios con texto. Este trabajo se introdujo en el contenido correspondiente al programa de la asignatura Matemática I de la carrera Licenciatura en Educación Primaria, y fue aplicado a una muestra de 19 estudiantes extraída de una población de 35 estudiantes.

Palabras claves: divisibilidad; criterio de divisibilidad; múltiplo; divisor.

Recibido: 26/11/2019 | **Aprobado**: 17/04/2020

Treatment of the divisibility criteria for Primary Education.

Abstract

The divisibility criterions in the teaching of Mathematics play an important role in the study of the arithmetic in Primary Education, these are used to simplify fractions, to investigate whether a given number is prime or not, among other contents. From the study carried out by different authors, it can be appreciated that some of them develop this content by using the arithmetic congruence that is not studied in the Cuban primary teaching, and others doesn't make it with the necessary scientific rigor. On the other hand, in the Mathematic textbooks is not explicit an adequate methodological treatment that allow students the conscious and deep appropriation of this content, which constitute the objective of this work. A study of the divisibility relationship in the whole numbers is carried out, which can reduce easily to the natural numbers; where said relationship is defined and exemplified, it's necessary properties are stated or demonstrated to obtain or demonstrate a considerable amount of divisibility criteria, some of these are exemplified and one is illustrated from their applications to the resolution of exercises with text. This work was introduced in the corresponding content to the program of the subject Mathematics I of the career Degree in Primary Education, and it was applied to an extracted sample of 19 students from a population of 35 students.

Keywords: divisibility; divisibility criterion; multiple; divisor.

Introducción

La enseñanza escolar de la Matemática se orienta fundamentalmente a desarrollar en los estudiantes el pensamiento funcional y capacitarlos para operar con objetos matemáticos continuos. Todos los cambios que se han hecho en los programas escolares de esta materia estuvieron encaminados en esta misma dirección.

La suma, diferencia y producto de números enteros es siempre un número entero. Esto significa que los números enteros son cerrados con respecto a la adición, sustracción y multiplicación. Pero con respecto a la división, este conjunto deja de ser cerrado. Es decir, el cociente de la división de un número entero por otro puede no ser un número entero.

Por lo anterior, al estudiar las propiedades de la división en los números enteros, una de las primeras cuestiones que se analiza es la posibilidad de realizar esta operación dentro del dominio numérico mencionado, es decir, la divisibilidad.

A partir de ahora se consideran conocidas las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas con números enteros y como es habitual, los números enteros no negativos se denominan naturales.

Autores como Díaz Quintanilla, C; Alvarado, A. (2014) definen los conceptos de relación de divisibilidad para números naturales, divisor, múltiplo y divisor complementario; enuncian y demuestran propiedades de la divisibilidad tales como la reflexividad, la anti simetría y la transitividad; obtienen los criterios de divisibilidad del 2; 4; 5; 8; 10; 25; 100; 125 y 1000, los criterios de divisibilidad del 3 y del 9 para números naturales de cuatro cifras, sin embargo, no se enuncian de forma explícita estos criterios como condiciones necesarias y suficientes.

Rodríguez, M; González, R; Sosa, J. (2018) definen los conceptos múltiplos y divisores de un número natural; se enuncian algunas propiedades de los divisores de un número natural y los criterios (reglas) de divisibilidad del 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 25; 100 y 1000 teniendo en cuenta condiciones necesarias y suficientes sin utilizar estos términos ni el conector “sí y solo si”.

Marx, S. y otros (1980) definen los conceptos de divisor y múltiplo de un número entero, divisor complementario, divisor trivial y divisor propio; se enuncian y se demuestran numerosas propiedades de la relación de divisibilidad para números enteros, sin embargo, los criterios de divisibilidad se tratan como aplicaciones del cálculo con congruencias numéricas.

Sócrates, R. (1966) no define explícitamente la relación de divisibilidad pero enuncia las propiedades fundamentales; se relacionan sin demostración los criterios de divisibilidad 2; 3; 4; 5; 7; 10; 11; 100; 1000; 4; 8; 16; 25;125 y 9; además, brinda un método general para encontrar criterios de divisibilidad por un número primo cualquiera o por un número que terminara en 1; 3; 7 o 9, aunque dicho número no sea primo, sin embargo, este método aparece sin demostración.

Potápov, M. (1986) conjuntamente con otros autores, enuncian propiedades y las demuestran, así como demuestran algunos criterios de divisibilidad 2; 4; 9 y proponen ejercicios de demostración de los criterios del 5; 8 y 11.

González, M. (1973) realiza su tratamiento de los criterios a partir de la definición de la relación de divisibilidad y varias propiedades y supone como conocido por el lector los criterios de divisibilidad “usuales”; demuestra algunos criterios y propone además ejercicios de demostración.

Otros autores como Coret, M. (1990) y Vorobiov, N. (1984) abordan estos criterios de divisibilidad a partir de la definición de congruencia numérica.

Esta revisión permitió arribar a la conclusión de que varios autores realizan el estudio de los criterios de divisibilidad a partir del concepto de congruencia numérica y otros consideran muchas de estas cuestiones conocidas por los lectores.

Además, se apreció que estos materiales requieren de un estudio más amplio y profundo sobre este contenido, así como ampliar la propuesta de ejemplos resueltos y ejercicios de aplicación relacionados con los criterios de divisibilidad, razón por la cual se hace la propuesta de este artículo para complementar el estudio de este contenido matemático.

Desarrollo

Se presenta a continuación el estudio de algunos criterios de divisibilidad sin utilizar el concepto de congruencia numérica. Esto propicia una mejor interpretación, comprensión y asimilación del contenido tratado.

I. Relación de divisibilidad en los números enteros.

Definición 1 (Divisibilidad en $\mathbb{Z}$)

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces se dice que "**b** es divisible por **a**" (o lo que es lo mismo, "**b** es un múltiplo de **a**", "**a** es un divisor de **b**") si existe $c \in \mathbb{Z}$, denominado cociente, tal que $b = a \cdot c$

Notación: ${}^{a}/_{b}$

En símbolos: $(a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \left[{}^{a}/_{b} \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{Z} : b = a \cdot c)\right]$

Nota: Si $a \neq 0$ y ${}^{a}/_{b}$, entonces se puede decir también que "**a** divide a **b**". (Díaz, C., 2014).

Ejemplos.

1) ${}^{7}/_{91}$ porque $91 = 7 \cdot 13$ y $13 \in \mathbb{Z}$

2) ${}^{-6}/_{42}$ porque $42 = -6 \cdot (-7)$ y $-7 \in \mathbb{Z}$

3) 15 no es divisible por 4 porque no existe número entero que multiplicado por 4 dé como resultado 15. Es decir, la ecuación $4x = 15$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

4) $b = 1 \cdot b$, para todo número entero b. Entonces, todo número entero es divisible por 1.

5) $b = 0 \cdot x$, solo tiene solución cuando $b = 0$. Entonces, cero solo es divisor de cero y en este caso el cociente puede tomar cualquier valor entero, es decir, el cociente es indeterminado. Por esta razón se dice que la división por cero es imposible.

6) $0 = a \cdot 0$, para todo número entero **a**. Entonces, todo número entero es divisor de cero.

7) $(1 = ac \ \wedge \ a, c \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a = c = 1 \ \vee \ a = c = -1)$. Es decir, los únicos divisores de 1 son 1 y -1. Análogamente se ilustra que los únicos divisores de -1 son 1 y -1.

Se debe aclarar que ${}^{a}/_{b}$ es una proposición que puede ser verdadera o falsa en dependencia de los valores enteros que tomen a y b. Por otra parte, $\frac{a}{b}$ es una división indicada si representa una fracción o un conjunto de fracciones iguales entre sí, si representa un número fraccionario. Luego ${}^{a}/_{b} \neq \frac{a}{b}$.

Para determinar si la proposición ${}^{a}/_{b}$ es verdadera o falsa, es decir, para aclarar la divisibilidad de un número por otro existen variados procedimientos. Uno de ellos y quizás el más usado, consiste en realizar la división, pero esto a menudo resulta largo, fatigoso y no siempre necesario.

Por lo anterior, resultaría interesante encontrar procedimientos más directos y económicos que la división directa. Tales procedimientos existen y se denominan criterios de divisibilidad.

La esencia de cualquier criterio de divisibilidades es reducir el problema de la divisibilidad del número entero **b** por el número entero **a**, al problema más simple de la divisibilidad del número entero **c** por **a** donde $c < b$.

II. Criterios de divisibilidad en el sistema de numeración decimal.

Todo sistema de numeración posicional se basa en el siguiente principio: "cierta cantidad fija de unidades constituye una nueva unidad del orden inmediato superior". Dicha cantidad fija recibe el nombre de base del sistema de numeración. Si por base del sistema se toma el número 2, el sistema de numeración se denomina binario y si se toma como base el número 10, el sistema se denomina decimal.

En el sistema de numeración decimal cada número natural N se puede representar en la forma:

$(*)\quad N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, donde $n \in \mathbb{N}$ y a_i son dígitos para $i = 0,1,2,\dots,n$.

Asociando convenientemente y sacando factor común, N se puede escribir en la forma:

$(**)\quad N = 10(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0$

Por otra parte, la relación de divisibilidad introducida en la definición 1 posee la siguiente propiedad, la cual juega un papel importante en la obtención de varios criterios de divisibilidad.

Teorema 1. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}\ y\ \ {}^{a}/_{b}$, entonces ${}^{a}/_{b+c}$ si y solo si ${}^{a}/_{c}$. (Marx, S., 1980).

Demostración

Necesidad: $\quad {}^{a}/_{b} \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{Z}: b = a \cdot x)$

$${}^{a}/_{b+c} \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{Z}:\ b + c = a \cdot y)$$

$$\Rightarrow c = a \cdot y - b = a \cdot y - a \cdot x = a \cdot (y - x)\ \wedge\ y - x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ {}^{a}/_{c}$$

Suficiencia: $\left.\begin{array}{l} {}^{a}/_{b} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}: b = a \cdot x \\ {}^{a}/_{c} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z}: c = a \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow b + c = a \cdot x + a \cdot y\ = a \cdot (x + y)\quad \wedge\quad x + y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow\ {}^{a}/_{b+c}$$

l.q.q.d.

Criterios de divisibilidad del 2, 5 y 10.

El primer sumando del miembro derecho de la igualdad ($**$) es divisible por 2, 5 y 10. Utilizando esta propiedad y el teorema 1, se obtienen los siguientes criterios de divisibilidad:

Teorema 2. (Divisibilidad por 2)

Un número natural N es divisible por 2, sí y solo si, la cifra de las unidades de N es divisible por 2. Es decir, si N termina en 0, 2, 4, 6 u 8. (Díaz, C., 2014).

Teorema 3. (Divisibilidad por 5)

Un número natural N es divisible por 5, si y solo si, la cifra de las unidades de N es divisible por 5. Es decir, si N termina en 0 ó 5. (Díaz, C., 2014).

Teorema 4. (Divisibilidad por 10)

Un número natural N es divisible por 10, si y solo si, la cifra de las unidades de N es divisible por 10. Es decir, si N termina en 0. (Díaz, C., 2014).

Criterios de divisibilidad del 4, 20, 25, 50 y 100.

Análogamente a como se obtuvo ($**$) se puede obtener:

$$(***) \quad N = 100(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2) + (a_1 10 + a_0)$$
$$= 100(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \cdots + a_3 10 + a_2) + \overline{a_1 a_0}$$

El primer sumando del miembro derecho de la igualdad anterior es divisible por cada divisor de 100, y para cada uno de ellos se obtiene un criterio de divisibilidad. Solo se destacan los siguientes:

Teorema 5. (Divisibilidad por 4)

Un número natural N es divisible por 4, si y solo si, es divisible por 4 el número $\overline{a_1 a_0}$, donde a_1 es la cifra de las decenas de N y a_0 la cifra de sus unidades. (Marx, S., 1980).

Teorema 6. (Divisibilidad por 20)

Un número natural N es divisible por 20, si y solo si, es divisible por 20 el número $\overline{a_1 a_0}$, donde a_1 es la cifra de las decenas de N y a_0 la cifra de sus unidades. Es decir, si N termina en 00, 20, 40, 60 u 80. (Marx, S., 1980).

Teorema 7. (Divisibilidad por 25)

Un número natural N es divisible por 25, si y solo si, es divisible por 25 el número $\overline{a_1 a_0}$, donde a_1 es la cifra de las decenas de N y a_0 la cifra de sus unidades. Es decir, si N termina en 00, 25, 50 ó 75. (Marx, S., 1980).

Teorema 8. (Divisibilidad por 50)

Un número natural N es divisible por 50, si y solo si, es divisible por 50 el número $\overline{a_1 a_0}$, donde a_1 es la cifra de las decenas de N y a_0 la cifra de sus unidades. Es decir, si N termina en 00 ó 50. (Marx, S., 1980).

Teorema 9. (Divisibilidad por 100)

Un número natural N es divisible por 100, si y solo si, es divisible por 100 el número $\overline{a_1 a_0}$, donde a_1 es la cifra de las decenas de N y a_0 la cifra de sus unidades. Es decir, si N termina en 00. (Marx, S., 1980).

Los criterios de divisibilidad que se obtienen por esta vía para 2, 5 y 10, carecen de valor práctico porque ya se obtuvieron criterios para estos números mucho más sencillos.

Criterios de divisibilidad del 8 y del 1000.

Extrayendo factor común 1000 en la representación, en el sistema decimal, del número natural N, se pueden obtener criterios para: 8, 40, 125, 200, 250, 500 y 1000. De estos solo se destacan dos que son los más usados.

Teorema 10. (Divisibilidad por 8)

Un número natural N es divisible por 8, si y solo si, es divisible por 8 el número $\overline{a_2 a_1 a_0}$, donde a_2 es la cifra de las centenas de N, a_1 la cifra de las decenas y a_0 la cifra de sus unidades. (Potápov, M., 1986).

Teorema 11. (Divisibilidad por 1000)

Un número natural N es divisible por 1000, si y solo si, es divisible por 1000 el número $\overline{a_2 a_1 a_0}$, donde a_2 es la cifra de las centenas de N, a_1 la cifra de las decenas y a_0 la cifra de sus unidades. Es decir, si termina en 000. (Potápov, M., 1986).

Criterios de divisibilidad de 3 y 9.

Estos criterios se apoyan en la siguiente propiedad, la cual se puede demostrar por inducción completa.

Teorema 12. Para todo número natural n se cumple:

(i) $10^n = \overline{\underbrace{99\ldots9}_{n\ veces}} + 1$

(ii) $\overline{\underbrace{99\ldots9}_{n\ veces}} = 9 \cdot \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n\ veces}}$ (Potápov, M., 1986).

Utilizando la propiedad anterior, todo número natural N se puede escribir en la forma:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

$$= a_n \left(\overline{\underbrace{99\ldots9}_{n\ veces}} + 1 \right) + a_{n-1} \left(\overline{\underbrace{99\ldots9}_{n-1\ veces}} + 1 \right) + \cdots + a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0$$

$$= \left(a_n \cdot \underbrace{\overline{99 \dots 9}}_{n\ veces} + a_{n-1} \cdot \underbrace{\overline{99 \dots 9}}_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 9\right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

$$= \left(a_n \cdot 9 \cdot \underbrace{\overline{11 \dots 1}}_{n\ veces} + a_{n-1} \cdot 9 \cdot \underbrace{\overline{11 \dots 1}}_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 9\right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

$$= 9\left(a_n \cdot \underbrace{\overline{11 \dots 1}}_{n\ veces} + a_{n-1} \cdot \underbrace{\overline{11 \dots 1}}_{n-1} + \cdots + a_1\right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

Como el primer sumando del miembro derecho de la igualdad anterior es divisible por 3 y por 9, entonces según el teorema 1 se obtienen los siguientes criterios de divisibilidad:

Teorema 13. (Divisibilidad por 3)

Un número natural N es divisible por 3, si y solo si, es divisible por 3 la suma de las cifras de N. (Potápov, M., 1986).

Teorema 14. (Divisibilidad por 9)

Un número natural N es divisible por 9, si y solo si, es divisible por 9 la suma de las cifras de N. (Potápov, M., 1986).

Criterio de divisibilidad del 7.

Es conocido que todo número natural, en el sistema decimal, se puede escribir en la forma:

$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$

$= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

$= 10(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0$

$= 10\ \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} + a_0$

$= 10b + a_0$, donde b es el número que se obtiene de N, eliminando su cifra de las unidades. Luego:

${}^{7}/_{N} \Leftrightarrow N = 7k$, donde k es un número entero, según definición de divisibilidad.

$\Leftrightarrow 10b + a_0 = 7k$

$\Leftrightarrow a_0 = 7k - 10b$

$\Leftrightarrow -2a_0 = -2(7k - 10b) = -14k + 20b$

$\Leftrightarrow b - 2a_0 = b + (-14k + 20b) = 21b - 14k$

$\Leftrightarrow b - 2a_0 = 7(3b - 2k)$, donde $(3b - 2k) \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow {}^{7}/_{(b - 2a_0)}$

Obteniéndose el criterio siguiente:

Teorema 15. (Divisibilidad por 7)

Un número natural N es divisible por 7, si y solo si, es divisible por 7 la diferencia entre el número que resulta de N eliminando la cifra de sus unidades y el duplo de esta cifra.

En símbolos: ${}^{7}\!/_{N = 10b + a_0} \Leftrightarrow {}^{7}\!/_{(b - 2a_0)}$ (Potápov, M., 1986).

Ejemplos.

1. $N = 91 = 10 \cdot 9 + 1 \Longrightarrow (b = 9,\ a_0 = 1\ \ y\ \ b - 2a_0 = 7)$. Como $b - 2a_0 = 7$ es divisible por 7, entonces $N = 91$ es divisible por 7.
2. $N = 882 = 10 \cdot 88 + 2 \Longrightarrow (b = 88,\ a_0 = 2\ \ y\ \ b - 2a_0 = 84)$. Si no se está seguro de la divisibilidad de 84 por 7, se puede repetir la aplicación del criterio.

   $N_1 = 84 = 10 \cdot 8 + 4 \Longrightarrow (b = 8,\ a_0 = 4\ \ y\ \ b - 2a_0 = 0)$. Como $b - 2a_0 = 0$ es divisible por 7, entonces 84 es divisible por 7, y por tanto 882 también lo es.
3. $N = 64 = 10 \cdot 6 + 4 \Longrightarrow (b = 6,\ a_0 = 4\ \ y\ \ b - 2a_0 = -2)$. Como $b - 2a_0 = -2$ no es divisible por 7, entonces 64 tampoco lo es.

Criterios de divisibilidad del 13 y del 17.

De forma análoga a como se obtuvo el criterio de divisibilidad por 7, se pueden demostrar los siguientes criterios:

Teorema 16. (Divisibilidad por 13)

Un número natural N es divisible por 13, si y solo si, es divisible por 13 la diferencia entre el número que resulta de N eliminando la cifra de sus unidades y nueve veces esta cifra.

En símbolos: ${}^{13}\!/_{N = 10b + a_0} \Leftrightarrow {}^{13}\!/_{(b - 9a_0)}$ (Kurosh, 1973).

Teorema 17. (Divisibilidad por 17)

Un número natural N es divisible por 17, si y solo si, es divisible por 17 la diferencia entre el número que resulta de N eliminando la cifra de sus unidades y cinco veces esta cifra.

En símbolos: ${}^{17}\!/_{N = 10b + a_0} \Leftrightarrow {}^{17}\!/_{(b - 5a_0)}$ (Kurosh, 1973).

Criterio de divisibilidad del 11.

El criterio de divisibilidad por 11 se basa en la propiedad siguiente, que se puede demostrar por inducción completa.

Teorema 18. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists q, r \in \mathbb{N}\text{:}\ 10^n = \begin{cases} 11q + 1 & si\ n\ es\ par \\ 11r - 1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$ (Kurosh, 1973).

Sea un número natural $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, donde n es par, entonces:

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

$= a_n(11k_n + 1) + a_{n-1}(11k_{n-1} - 1) + \cdots + a_2(11k_2 + 1) + a_1(11k_1 - 1) + a_0$

$= (a_n 11k_n + a_{n-1} 11k_{n-1} + \cdots + a_1 11k_1) + (a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots + a_2 - a_1 + a_0)$

$= 11K + [(a_n + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_0) - (a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3 + a_1)]$

$= 11K + (A - B)$, donde A es la suma de las cifras de N que ocupan lugares pares y B es la suma de las cifras de N que ocupan lugares impares.

Si n es un número natural impar se obtiene un resultado similar:

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

$= a_n(11k_n - 1) + a_{n-1}(11k_{n-1} + 1) + \cdots + a_2(11k_2 + 1) + a_1(11k_1 - 1) + a_0$

$= (a_n 11k_n + a_{n-1} 11k_{n-1} + \cdots + a_1 11k_1) + (-a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \cdots + a_2 - a_1 + a_0)$

$= 11K + [(a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_2 + a_0) - (a_n + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_1)]$

$= 11K + (A - B)$, donde A es la suma de las cifras de N que ocupan lugares pares y B es la suma de las cifras de N que ocupan lugares impares.

Resumiendo estos resultados se obtiene:

Teorema 19. (Divisibilidad por 11)

Un número natural N es divisible por 11, si y solo si, es divisible por 11 la diferencia entre la suma de las cifras de N que ocupan lugares pares y la suma de las cifras de N que ocupan lugares impares. (Kurosh, 1973).

Ejemplos.

1) $^{11}/_{12\ 732\ 456}$ $porque$:

$(a_6 + a_4 + a_2 + a_0) - (a_7 + a_5 + a_3 + a_1) = (2 + 3 + 4 + 6) - (1 + 7 + 2 + 5) = 15 - 15 = 0,$ y cero es divisible por 11.

2) 1 111 111 no es divisible por 11 porque:

$(a_6 + a_4 + a_2 + a_0) - (a_5 + a_3 + a_1) = (1 + 1 + 1 + 1) - (1 + 1 + 1) = 4 - 1 = 1,$ y uno no es divisible por 11.

Criterios de divisibilidad de números compuestos.

El siguiente teorema brinda otra propiedad de la relación de divisibilidad.

Teorema 20. Si $a, b, N \in \mathbb{Z}$ y $mcd(a, b) = 1$, entonces: $\left(^{a}/_{N} \wedge {}^{b}/_{N}\right) \Leftrightarrow {}^{ab}/_{N}$ (Kurosh, 1973).

Aplicando este teorema se pueden obtener criterios de divisibilidad para números enteros que se pueden expresar en la forma $a \cdot b$, donde se conocen criterios de divisibilidad para cada uno de estos factores y dichos factores son primos entre sí.

Teorema 21. (Divisibilidad por 6)

Un número natural N es divisible por 6, si y solo si, N es divisible por 2 y por 3. (Kurosh, 1973).

Por esta vía se pueden obtener criterios de divisibilidad para: 12, 15, 18, 20, 24, 36, 40, 45, 72, etc.

Criterios de divisibilidad de números primos.

Teorema 22. (Divisibilidad por un número primo)

Si p es un número primo cualquiera y $\overline{k1}$ es un múltiplo de p que termina en 1, donde k es un número entero, entonces: $^{p}/_{N = 10b + a_0} \Leftrightarrow {^{p}/_{b - ka_0}}$ (Vorobiov, N., 1984)

Este criterio puede aplicarse para investigar la divisibilidad por cualquier número que termina en 1, 3, 7 ó 9, aunque no sea primo.

III. Aplicación a ejercicios más complejos.

Utilizando las propiedades anteriores se pueden resolver ejercicios con un grado superior de dificultad. Es decir, ejercicios como el siguiente, los cuales suelen aparecer en concursos de diferentes niveles.

Determinar todos los números de la forma $\overline{3x97y}$, donde x, y son dígitos, que son divisibles por 99.

<u>Solución</u>:

$99 = 9 \cdot 11 \ \wedge \ mcd(9{,}11) = 1$. Entonces los números buscados tienen que ser divisibles por 9 y por 11.

$$^{9}/_{\overline{3x97y}} \Leftrightarrow {^{9}/_{3 + x + 9 + 7 + y = 19 + x + y}} \Leftrightarrow (x + y = 8 \ \vee \ x + y = 17)$$

$$^{11}/_{\overline{3x97y}} \Leftrightarrow {^{11}/_{(3 + 9 + y) - (x + 7) = 5 + y - x}} \Leftrightarrow (y - x = -5 \ \vee \ y - x = 6)$$

Los valores de x, y buscados son las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 17 \\ y - x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 17 \\ y - x = 6 \end{cases}$$

De estos sistemas, solo el segundo aporta solución que cumple con las exigencias del ejercicio. Esta solución es $x = 1, \ y = 7$.

Respuesta: El único número es 31 977.

Conclusiones

1. En este trabajo se ha abordado un contenido matemático de escaso tratamiento en la literatura básica en la escuela y se considera que su conocimiento constituye una necesidad tanto para docentes como estudiantes por la aplicación que tiene el mismo en la enseñanza de la Matemática.
2. Es importante destacar la importancia que reviste para los docentes conocer cómo pueden obtenerlos y cómo demostrar estos criterios, lo que facilitaría el proceso de aprehensión por parte de los estudiantes, además, este trabajo va a facilitar la preparación de los docentes

para la impartición del contenido tratado dado a las limitaciones del mismo en la literatura básica.

Referencias Bibliográficas

Coret, M. (1990). *Álgebra Moderna I, segunda parte.* La Habana: Pueblo y Educación.

Díaz Q, C; Alvarado, A (2014). Matemática para la Licenciatura en Educación Primaria. La Habana: Pueblo y Educación

González, M. O. (1973). *Matemática, Quinto Curso, Tomo 1, Complementos de Aritmética y Álgebra.* La Habana: Pueblo y Educación.

Kurosh, A. G. (1973). *Lecciones de Álgebra General.*Moscú: Naúka.

Márkov, A. A. (1954). *Teoría de los algoritmos.* Moscú: Mir.

Marx, S. (1980). *Teoría Elemental de los Números, Ecuaciones y Combinatoria.* La Habana: Libros para la Educación.

Potápov, M. (1986). *Álgebra y Análisis de Funciones Elementales.* Moscú: Mir.

Rodríguez, M; González, R y Sosa, J (2018) Matemática , Quinto Grado. La Habana: Pueblo y Educación.

Sócrates, R (1966) Matemática, Aritmética, Primer Curso, Tomo I. La Habana: Editora Pedagógica.

Vorobiov, N. N. (1984). *Criterios de Divisibilidad.* Moscú: Mir.