Revisión

APLICACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA EN LAS RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Application of the adyacencia womb in the equivalence relationships

Lic. Pedro Manuel Estrada-Jiménez, Universidad de Granma, pestradaj@udg.co.cu, Cuba
José Antonio Leyva-Regalón, Universidad de Granma, jaleyva@udg.co.cu, Cuba
Henrry Tomás Brown-Grandales, Universidad de Guantánamo, henrryt@cug.co.cu, Cuba
Recibido 11/07/2017- Aceptado 05/09/2017

RESUMEN

El presente trabajo fue desarrollado con el objetivo de vincular los conocimientos de la teoría de grafos, relaciones binarias, relaciones de equivalencia y matrices de adyacencia, para ello nos auxiliamos de compañeros de trabajo de otras universidades con los cuales consultamos informaciones para dar paso a los resultados obtenidos. Los conceptos analizados para el desarrollo del mismo fueron consultados desde varias fuentes, entre las que se encuentran en las referencias. Otro de los parámetros u objetivo, fue el uso que pueda tener esta vinculación de la Matemática con la especialidad de Informática en el desarrollo de sistemas que trabajen con grafos para representaciones de redes o cualquier otro al que pueda interesar el contenido del mismo. Partiendo de los conceptos, utilizamos como materiales bibliografías en formato duro y digital; entre los métodos utilizados podemos citar la consulta a bibliografía, consulta a profesores de Matemática de diversos escenarios universitarios, profesores y personal informático que alguna vez hayan trabajado con grafos, además personal científico o investigador con conocimiento del tema.

Palabras claves: Matriz de adyacencia, relación de equivalencia, grafo.

ABSTRACT

This paper was developed with the aim of linking the knowledge of graph theory, binary relations, equivalence relations and adjacency matrices, for this we help colleagues from other universities with which we consult information to make way for the results obtained. The concepts analyzed for the development of the same were consulted from several sources among those found in the references. Another of the parameters or objective was the use that this linkage of mathematics with the specialty of Computer science in the development of

systems that work with graphs for representations of networks or any other to which the content of the same may be interested. Based on the concepts used as materials in hard and digital format bibliographies and among the methods used we can mention the bibliography consultation and consultation of mathematics teachers of various university scenarios, teachers and computer personnel who have ever worked with graphs and scientific personnel or Researcher with knowledge of the subject.
Key words: Adyacencia womb, equivalence relationship, grafo.

INTRODUCCIÓN

El uso de una matriz de adyacencia puede tener numerosos usos, entre ellos se puede mencionar el uso en la determinación de relaciones de equivalencia sobre elementos de un grafo, definiéndose con anterioridad los conjuntos de elementos que componen al mismo (grafo), el conjunto de vértices V y arcos A. Los grafos, como estructuras de conjuntos pueden ser representados mediante matrices en las cuales las intersecciones van a ser cubiertas por 0 ó 1, teniendo en cuenta que cuando exista un 0 en una celda significa que no existe relación entre los pares relacionados y cuando aparece un 1 es que existe una relación. Por otra parte, las relaciones de equivalencia se componen por aplicaciones donde el conjunto de elementos que resulten de la aplicación sobre un conjunto debe cumplir que sea reflexiva, simétrica y transitiva para que cumpla que es una relación de equivalencia.

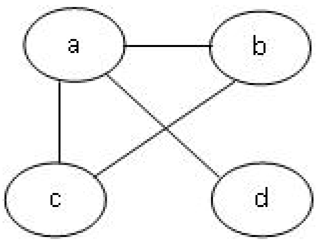
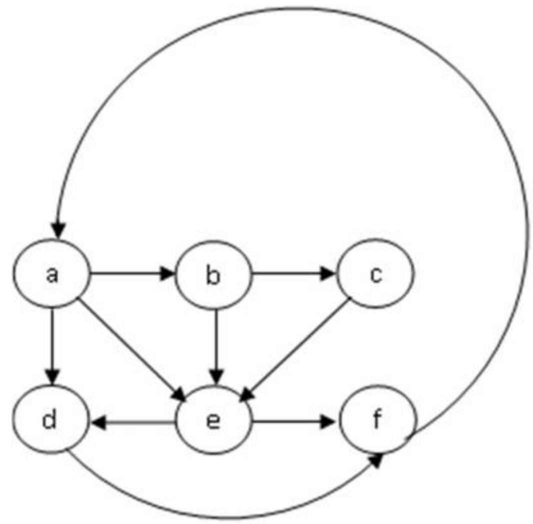
Las aplicaciones de una simple matriz de adyacencia son numerosas en el contexto del mundo actual, se puede mencionar el uso de matrices de adyacencia en campos como pueden ser, problemas de transporte, problemas de soluciones informáticas aplicadas a equipos de medición médica, etc. Su uso se ha extendido en una serie de campos que en este momento se hace un poco complejo de explicar. El uso de la matriz de adyacencia para determinar relaciones de equivalencia sobre los elementos que pueda contener un grafo, entre otras aplicaciones, brinda la posibilidad de saber mediante las mismas si una aplicación determinada sobre un subconjunto de los componentes de un grafo determinado, puede ser una relación de equivalencia analizando la matriz de adyacencia, por tanto, las matrices brindan información de las relaciones entre los elementos del grafo que se seleccione para aplicar una aplicación determinada.

DESARROLLO

Para el desarrollo de este trabajo se analizaron los conceptos fundamentales de los que forman parte los grafos, estos determinados matemáticamente como " una abstracción matemática definida por la relación G=<V,A> donde V es el conjunto de nodos o vértices y A es el conjunto de pares que definen los arcos o aristas que unen pares de vértices o lazos si unen a un vértice consigo mismo" (Molina, 2011a), de ello es necesario conocer que los tipos de grafos pueden clasificarse como orientados y no orientados, además, tener en cuenta que los grafos notables existen:

- Grafo nulo: Grafo sin nodos.
- Grafo vacío: Es el grafo que no contiene aristas.
- Grafo Unitario: Grafo que contiene un solo nodo y no contiene lazos.
- Grafo Simple: Grafo sin Lazos.
- Grafo Conexo: Grafo en el que existe al menos un camino donde se pueda llegar desde cualquier nodo origen a cualquier nodo destino.
- Grafo Completo: Grafo donde existe un arco entre cualquier par de vértices.
- Grafo Xn: Grafo completo simple de orden n.
- Grafo Bipartido: Es el grafo en el cual su conjunto V puede separarse en V_1 y V_2 sin coincidencias entre ambos en donde cada arista tiene un extremo en V_1 y otro en V_2.
- Grafo Bipartido Completo: Es un grafo bipartido en el cual cada nodo de V_1 está unido a todos los vértices de V_2.
- Grafo Plano: Es un grafo en el que sus aristas o arcos pueden representarse sin que una cruce con otra.

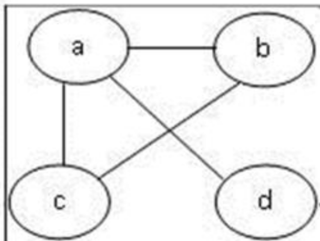
Figura 1 Ejemplos de grafos que se clasifican en base a la dirección de sus arcos

Arbol: Grafo conexo sin ciclos. Grafo Euleriano: Grafo que tiene caminos de Euler. 	
Grafo no orientado $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d)$ y $A = (\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\})$	Grafo orientado $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d, e, f)$ y $A = (\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, d\}, \{d, f\}, \{f, a\})$

Este tema a su vez tiene una amplia ligadura al relacionado con el tema de conjuntos, tratado por varios autores entre los que se pueden mencionar (Briand, 2011),(Garílov y Zapozhenko, 1980) y los conjuntos numéricos (Rodríguez, 2014).

Matriz de adyacencia es más una “Matriz cuadrada de orden NxN asociada a un grafo de orden N, donde sus filas y columnas se identifican con los vértices del grafo y en las celdas se indican la cantidad de aristas (o arcos salientes si es un dígrafo) a los nodos asignado a la fila y columnas en cuestión” (Molina, 2011b), de donde se tiene que a un grafo $G = (V, A)$ de orden n, se le hace corresponder una matriz de adyacencia que en cada celda puede contener solamente un número que será 0 o 1, siendo cero para cuando no exista relación entre un par de vértices y 1 en el caso contrario, por ejemplo, sea el grafo $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d)$ y $A = (\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\})$ se generaría la siguiente matriz de adyacencia, la cual determinaremos por Z como se muestra en la figura 2:

En un segundo ejemplo tengamos en cuenta la matriz de adyacencia asociada a un grafo orientado como se muestra en la figura 3 donde vamos a tener en cuenta que $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d, e, f)$ y $A = (\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, d\}, \{d, f\}, \{f, a\})$



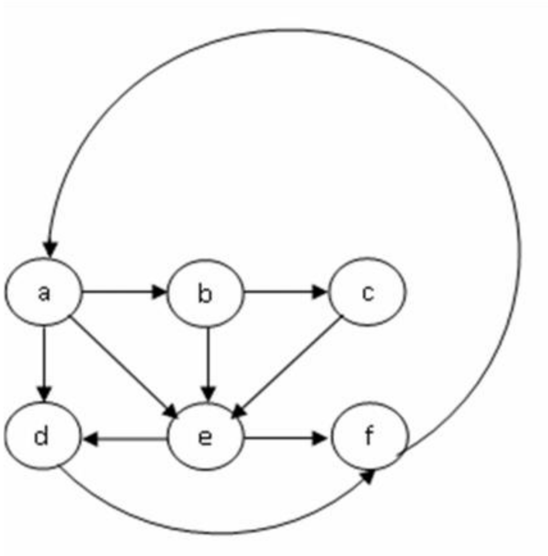
$$Z = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Grafo $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d)$ y $A = (\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\})$

Matriz de adyacencia asociada a G.

Nota: Tenga en cuenta que este grafo es un grafo no dirigido, por lo que en el momento de representar la matriz de adyacencia se debe hacer correspondes para cada par el mismo valor, por ejemplo, en el caso del arco {a,b}, debe existir un 1 en Z en la intersección a,b y en b,a.

figura 3



$$Z = \begin{array}{c|cccccc|} & a & b & c & d & e & f \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Grafo $G = (V, A)$, donde $V = (a, b, c, d, e, f)$ y $A = (\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{e, d\}, \{d, f\}, \{f, a\})$

Matriz de adyacencia asociada a G.

Nota: En este caso estamos en presencia de un grafo orientado, por lo que en la matriz de adyacencia sólo se marcará con 1 las celdas relacionadas en el mismo orden en que se encuentre el par de la relación, por ejemplo, en el caso del arco {a,e} se pondrá un 1 en la celda a;e porque el sentido del arco indica que parte de a y termina en e.

Relación Binaria: es una relación matemática que existe entre los elementos de dos conjuntos. Se dice que una relación R_{AB} se puede representar mediante pares ordenados (a,b) donde existe y se cumple la propiedad de que P(a,b), esto debe cumplir con que E$(a, b) \in A \times B$, lo que conllevaría a que la relación se exprese de la siguiente manera:

$$R = \{(a, b): a \square A \square b \square B \square P(a, b)\}$$

Ahora, se puede decir que la relación está formada por el conjunto de pares ordenados de la forma (a,b) de forma tal que el primer elemento a, que pertenece al conjunto A se relaciona con el elemento b, que pertenece a B, entiéndase que los conjuntos A y B son los conjuntos de partida y llegada respectivamente y que a los elementos del conjunto de partida se les conoce como conjunto dominio y a los elementos del conjunto de llegada se les conoce como conjunto imagen.

Por ejemplo, tomemos como A = 0,1,2,3,4 y B = {5,6,7,8,9}, finalmente la relación R_{AB}{ a, b : $a + b$ %2 = 0} = {< 0,6 > , < 0,8 > , < 1,5 > , < 1,5 > , < 1,9 > ⋯ }. Tema tratado también por (Godement, 1963),(Jhonsonbaugh, 1999),(Jr. y Jaisingh, 2004),(Kostrikin, 1983),(Singh, 2005),(Yi, 2009).

Relación de equivalencia: se dice que una relación binaria es una relación de equivalencia cuando la misma tiene la propiedad de ser reflexiva, simétrica y transitiva, ahora supongamos que contamos con un conjunto X y una relación binaria R entre sus elementos:

- se dice que R es reflexiva si y solo si □a □ X: a, a □ R, es decir, que cada elemento de X esté relacionado consigo mismo.
- se dice que R es simétrica si y solo si □a, b □ X: a, b □ R y b, a □ R, esto quiere decir que para cada par debe existir su simétrico.
- se dice que R es simétrica si y solo si □a, b, c □ X: a, b □ R, b, c □ R y a, c □ R, lo que implica que el elemento *a* tiene que estar relacionado con cada elemento que esté relacionado con los que él esté relacionado.

Supongamos que sobre un conjunto G = {1,3,5,6} fue aplicada una relación binaria R que dio como resultado el siguiente conjunto de pares:

X = { 1,3 , 1,5 , 1,6 , 1,1 , 3,1 , 3,1 , 3,5 , 3,6 , 5,1 , 5,3 , 5,6 , 5,5 , 6,1 , 6,3 , 6,5 }, este resultado de pares no cumple con que la relación aplicada sobre el conjunto sea una relación de equivalencia porque faltan los pares (3,3) y (6,6) y para que la relación fuera de equivalencia debería quedar de la siguiente forma:

X =

{ 1,3 , 1,5 , 1,6 , 1,1 , 3,1 , 3,1 , 3,5 , 3,6 , 3,3 , 5,1 , 5,3 , 5,6 , 5,5 , 6,1 , 6,3 , 6,5 , (6,6)}

de esta manera se garantiza que la relación sea reflexiva, simétrica y transitiva; se cumple la reflexividad porque cada elemento del conjunto está relacionado consigo mismo, ello lo demuestran los pares 1,1 , 3,3 , 5,5 y (6,6), es simétrica porque cada par de la relación tiene su simétrico, esto lo demuestran los pares:

1,3 , 1,5 , 1,6 , 3,1 , 3,1 , 3,5 , 3,6 , 5,1 , 5,3 , 5,6 , 6,1 , 6,3 y 6,5 , porque cada par tiene su simétrico y finalmente, es transitiva porque cada elemento del conjunto está relacionado con cada elemento que está relacionado con los que él está relacionado. Tema que también ha sido tratado por (Godement, 1963),(Jhonsonbaugh, 1999), (Kostrikin, 1983),(Singh, 2005),(Gutiérrez, 2004)

VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

Si se deseara explicar de una forma clara el funcionamiento de una aplicación de este tipo, es preciso analizar con detenimiento los conceptos reflejados anteriormente, por ejemplo, si tenemos una relación binaria entre dos conjuntos, uno de partida y otro de llegada, donde llamamos arbitrariamente como M el de partida y N el de llegada, debemos tener en cuenta que el resultado es un subconjunto del producto cartesiano de MxN, ahora, para poder decir que m está relacionada con n tenemos que verificar primero que $(m, n) \in R$, por tanto nos queda que $m\,R\,n$.

Otro punto teórico a tener en cuenta, son algunas propiedades de las relaciones, estas pueden ser reflexiva, simétrica, transitiva, como se explicó anteriormente, donde finalmente una relación binaria que cumpla con estas propiedades se convierte en una relación de equivalencia.

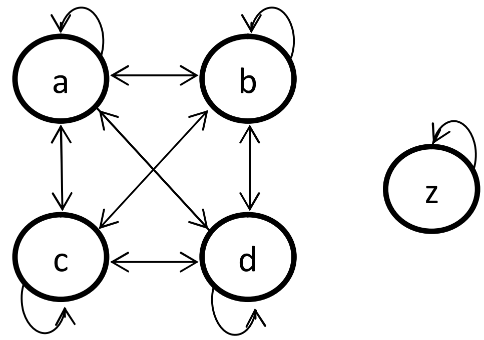
Si quisiéramos ver de forma gráfica, el funcionamiento de las relaciones podemos auxiliarnos de un grafo dirigido, donde las cabezas de flecha (arista) indican el sentido de una relación entre los nodos del grafo, por tanto, si un nodo x está relacionado con un nodo y (x, y), donde el origen es en x, se dibuja una flecha que parte de x, y termina en y, indicando la cabeza de flecha en y, ya que es en esta donde termina el recorrido de la arista, de esta forma se indica el sentido de la relación, donde encontremos que el par es (x, x), estamos en presencia de un elemento que está relacionado con él mismo, situación que explicamos anteriormente y que se conoce como lazo.

Existen varias formas de representar un grafo, de ellas hemos explicado ya algunas, entre las que figuran las matrices de adyacencia, las cuales son matrices de orden par, donde las filas y columnas están encabezadas con los elementos del grafo para indicar en algún momento los nodos que están relacionados. Para fusionar algunos de los conceptos vistos anteriormente, debemos suponer un grafo dirigido $G = (V, A)$, se puede definir a M como la matriz de adyacencia de G donde $M = m_{ij}$, $(1 < i|j < n)$

$$m_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in A \\ 0 \text{ si } (v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

Ahora tengamos en cuenta una relación $R = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,a), (b,c), (b,d),$

c, c , c, a , c, b , c, d , d, b , d, c , d, a , d, d , (z, z)}, a las claras se puede ver que la misma es una relación de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva

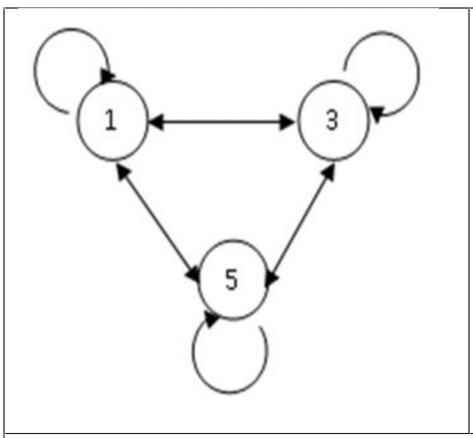


$$A=\left[\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & z \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Entonces podemos definir a A como la matriz de adyacencia de la relación dada. Para comprobar cada una de las propiedades de las relaciones en las matrices de adyacencia se pueden consultar las bibliografías citadas, esto puede traer como consecuencias que se puedan crear algoritmos eficaces para determinar o identificar las propiedades de las relaciones en las matrices.

Ejemplo:

Se desea determinar en una ciudad si los puntos por los que puede pasar un ómnibus están conectados entre sí. Para ello podemos tomar una ciudad compuesta por 7 puntos, es decir, el conjunto de elementos va a estar compuesto por 7 puntos (o paradas), llamemos a estos puntos como $G = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, ahora para determinar estos puntos por los que puede pasar el ómnibus, se aplica una relación binaria en la que los resultados obtenidos de esta aplicación sobre G son los valores $R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,3),(3,1),(3,5),(5,5),(5,1),(5,3)\}$, ahora, analizando el resultado de la aplicación de R sobre el conjunto de las paradas, conformamos un nuevo grafo partiendo del resultado de R como se muestra en a figura 4



$$\left[\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Figura 4. Grafo y matriz de adyacencia asociada al grafo.

Es de notar que el grafo resultante de la relación binaria es un subgrafo, o simplemente forma parte de los elementos del conjunto original, además mediante la aplicación de la relación binaria se puede destacar que la relación binaria es una relación de equivalencia porque se cumplen las tres condiciones de la relación, además se puede conocer que todas las rutas con las paradas resultantes de la aplicación de la relación están relacionadas entre sí, por tanto solo queda aclarar que la relación es de equivalencia porque:

Es reflexiva porque $\forall a \in G: (a, a) \in R$

Es simétrica porque $\forall a, b \in G: (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

Es transitiva porque $\forall a, b, c \in G: ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$

CONCLUSIONES:

Con el estudio de la aplicación de las matrices de adyacencia se puede asumir que, no solo son importantes en el área del álgebra simple, entiéndase por esto, solo las operaciones básicas del trabajo con matrices. El uso de las mismas se ha probado que tienen gran importancia en un sin número de procesos y eventos en los que a diario nos enfrentamos, uno de ellos es precisamente la determinación de relaciones de equivalencias mediante matrices de adyacencia. La importancia de estas aplicaciones sobre grafos puede ayudar a determinar posibles caminos que puedan estar relacionados entre sí mediante algún criterio (relación binaria) que en un momento determinado pueda convertirse en una relación de equivalencia.

REFERENCIAN BIBLIOGRÁFICAS

Briand, E. (2011). Introducción a la Matemática Discreta.

Garílov, G. P., & Zapozhenko, A. A. (1980). *Problemas de Matemática Discreta*. Moscú: MIR.

Godement, R. (1963). *Algebra*. Paris: HERMANN.

Gutiérrez, F. J. G. (2004). Apuntes de Matemática Discreta.

Jhonsonbaugh, R. (1999). *Matemáticas Discretas*. México: Prentice Hall.

Jr., F. A., & Jaisingh, L. R. (2004). *Theory and Problems of Abstract Algebra*. New York.

Kostrikin, A. I. (1983). *Introducción al Algebra*. Moscú: MIR.

Molina, J. S. (2011a). Grafo. from https://www.ecured.cu/index.php?title=Grafo&action=info

Molina, J. S. (2011b). Matriz de adyacencia. from https://www.ecured.cu/Matriz_de_adyacencia

Rodríguez, L. I. L. (2014). INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA.

Singh, Y. N. (2005). *Mathematical Foundations of Computer Science*. New Dheli: One Wordl.

Yi, C.-W. (2009). Discrete Mathematics.