

Acercamiento a la modelación matemática en el tratamiento didáctico de los contenidos de la Física (Revisión)

Approach to the mathematical modeling in the didactic treatment of the contents of the Physics (Review)

Baloy Suárez Rodríguez. Licenciado en Educación en la especialidad de Física y Astronomía. Máster en Ciencias. Profesor Instructor. Universidad de Granma. Manzanillo. Granma. Cuba.

bsuarezr@udg.co.cu 

José Arturo Peña Pérez. Ingeniero Eléctrico. Profesor Asistente. Universidad de Granma.

Manzanillo. Granma. Cuba. jpenaperez@udg.co.cu 

Ignacio Rafael Benítez Rodríguez. Licenciado en Educación en la especialidad de Física.

Profesor Auxiliar. Universidad de Granma. Manzanillo. Granma Cuba. ibenitezr@udg.co.cu 

Recibido: 12-09-2022/ Aceptado: 04-12-2022

Resumen

Una adecuada observación del alcance de la interdisciplinariedad, se convierte en un fundamento estructural para un pertinente tratamiento didáctico del conocimiento en virtud de la existencia de los objetos, procesos, fenómenos, y las relaciones entre ellos como entes naturales. Basado en lo anterior, se realiza una revisión de algunos posicionamientos teóricos y metodológicos, como aproximación a la concepción del tratamiento didáctico de un conocimiento en particular. En ese sentido, se analizan algunos elementos del conocimiento asociados a la aplicación de la modelación matemática en Física, resaltando la importancia del aprendizaje integrador.

Palabras clave: interdisciplinariedad; didáctica; matemática; física

Abstract

An observation of the interdisciplinary becomes a structural foundation for a pertinent didactic treatment of the knowledge about the existence of the objects, processes, phenomena and relations among themselves. Based in the above, a revision of some tendencies is accomplished, like approximation to the conception of the didactic treatment of the particular knowledge. Specifically, the mathematical modeling applies to Physics, highlighting the importance of the integrative learning.

Keywords: interdisciplinary; didactic; mathematics; physics.

Introducción

En varias investigaciones sociales se constata que, aunque en los currículos vigentes se ha reconocido la necesidad de incorporar la visión interdisciplinar a la práctica pedagógica, existen insuficiencias en cuanto al reconocimiento de las relaciones filosóficas entre la especialización y la interdisciplinariedad, resultando en prácticas ajenas a la adquisición de un aprendizaje consciente y aplicativo Salazar et al. (2020). Por otra parte, se observa que la necesidad de articular el contenido de Física con intereses de los estudiantes y la intención de lograr una enseñanza comprometida con las transformaciones científico-técnicas, han sido centro de atenciones y preocupaciones de investigaciones en didáctica de la enseñanza de la Física (Campelo, 2003).

Varios especialistas reconocen que el desarrollo de los conocimientos se realiza de forma compleja, híbrida, no lineal, heterogénea y transdisciplinar. Al referirse a este término y su vínculo con la educación, plantean que

La integración de los conocimientos de las diferentes ramas de la cultura y el saber humanos, las habilidades generales y particulares, las actitudes y valores deben caracterizar la estructuración curricular y el desarrollo metodológico de su contenido

como soporte didáctico que faciliten una comprensión más reflexiva y crítica de la realidad. (Perera, 1999, p.34)

En relación con lo anterior, Salazar et al. (2020) sintetiza que la interdisciplinariedad es análisis sistemático de tributos y aportes mutuos y determinación de estrategias comunes como enfoque para el mejor y más completo acceso al conocimiento. Se destaca en ella el aporte de nuevas formas de pensamiento. Al orientarse, lo hace sobre la base del dominio de las disciplinas particulares y hacia la ruptura de barreras disciplinares. Es por tanto negación dialéctica y cualidad superior respecto al aprendizaje disciplinar.

Por otra parte, el desarrollo rápido de la ciencia Física, su diferenciación y la estrecha vinculación de los distintos enfoques en el análisis de los problemas complejos, exigen del estudiante una capacidad especial, un pensamiento simultáneo en diferentes planos lógicos, es decir, la habilidad de construir varias cadenas lógicas y retener en la memoria una gran cantidad de información. Cuando la enseñanza está organizada y estructurada correctamente, entre los conocimientos, las habilidades y los hábitos, se origina una interacción dinámica que desempeña un importante papel en la actividad creativa del estudiante.

De acuerdo con Campelo (2003), las ciencias naturales se basan en un proceso del pensamiento hipotético-deductivo que puede describirse mediante una metodología científica, partiendo de una hipótesis teórica para desarrollarse en dirección a sus consecuencias lógicas; las cuales se caracterizan y, en una fase posterior, se someten a una comprobación experimental de confirmación o de aplicación, que permita hacer la enseñanza de la Física más efectiva y motivadora. Al unificar las concepciones planteadas, es posible exponer elementos que revelen conexiones esenciales y generales de determinados objetos físicos, sirviendo de fuente para las

abstracciones y generalizaciones en el proceso de construcción del conocimiento, con un enfoque interdisciplinario centrado en la modelación matemática.

Desarrollo

En correspondencia con las exigencias mencionadas, se analiza una propuesta didáctica para la solución de dificultades en el aprendizaje de la Física. Esta forma de enseñanza se fundamenta en el enfoque Histórico-Cultural, la Teoría de la Actividad y Generalización Teórica, y es desarrollada a través del método estructural-funcional para la organización del contenido a aprender y las regularidades de la actividad de estudio, que proporciona una posición más activa de los estudiantes, a partir de la realización de acciones tan importantes como la modelación, la experimentación y la simulación en clases para la solución de problemas. (Campelo, 2003)

El modelo didáctico referido tiene como eje los principios siguientes:

- Concepción sistémica estructural-funcional de organización del contenido de las asignaturas relacionadas con la Física.
- Enfoque fenomenológico de los conceptos físicos, es decir, las relaciones recíprocas existentes entre los elementos de un concepto físico son: el modelo físico, el plan fenomenológico de la descripción de la realidad y el aparato formal de la teoría.
- Enseñanza basada en el método científico, utilizando la actividad de estudio como actividad colectiva y orientada hacia la formación del pensamiento deductivo de los estudiantes.

La planificación de la actividad cognoscitiva movilizará la atención y el razonamiento activo del estudiante, una vez que lo prepara para recibir el nuevo material, familiarizarse con los hechos, objetos y fenómenos cuyo estudio comprenden. La primera parte de la actividad de estudio se refiere a la orientación, es decir, en esta fase el profesor es fuente de información,

tanto de los conocimientos de la asignatura, como del contenido de la actividad de estudio que se está formando. Esta parte consiste en preparar al estudiante para desarrollar la actividad de estudio y por consiguiente la adquisición de conocimientos y habilidades a través de la motivación.

La formación de la base orientadora de la actividad de estudio, tiene como objetivos:

- Mostrar el contenido de la actividad de estudio al estudiante y el esquema de trabajo que deberá incluir todos los aspectos necesarios para la realización de las acciones de estudio.
- Elaborar las instrucciones sobre la actividad de estudio en forma generalizada. Así el procedimiento de identificación debe ofrecer una forma generalizada para trabajar y no una forma concreta.
- Elaborar la comprobación del sistema de características necesarias y suficientes, registrar los resultados en la forma generalizada, comparar con la regla lógica y por ultimo las conclusiones.

Seguidamente se exponen las bases orientadoras de dos tipos de actividades de estudio

Actividad de estudio tipo I.

Objetivo: proponer una situación-problema y a partir de esta encontrar los conceptos esenciales y generalizados implicados en la solución del objeto de estudio, a través del modelaje y experimentación de la actividad de estudio.

Orientación: fundamentar el conocimiento físico en el tema del estudio; formular la tarea de estudio.

Etapas:

1. Analizar la actividad de estudio propuesta, hacer la representación y solución del problema, describir los factores que son indispensables para la solución del problema propuesto.
2. Modelar el objeto de estudio: definir las magnitudes y atributos necesarios y suficientes, construir el concepto físico y la formulación matemática de la solución del problema.
3. Con base en el modelaje de la situación-problema, analizar los elementos y propiedades esenciales y las magnitudes físicas implicadas en el fenómeno, así como la interrelación del concepto físico (modelo, fenomenología y formalismo matemático) definido.
4. Realizar la experimentación del modelo planteado, reproducir el fenómeno previsto y hacer las observaciones, las mediciones y registrar los datos.
5. Analizar los resultados de la experimentación en relación al conocimiento disponible de la ciencia Física, favoreciendo la revisión de la modelación inicialmente elaborada.
6. Elaborar un informe que sintetice la actividad (acciones fundamentales) realizada, resaltando los aspectos de mayor interés y relevancia como resultado de la experimentación, para ser presentado y discutido al final de la actividad de estudio.
7. Generalizar y reflejar el concepto estudiado, profundizar en diferentes aspectos la situación física examinada, concebir su translación a otros contextos y aplicabilidad.

Actividad de estudio tipo II.

Objetivo: mostrar el fenómeno físico y a partir de esta demostración definir los conceptos implicados, así como, para caracterizar los elementos y las propiedades esenciales del fenómeno físico estudiado.

Orientación: demostrar un fenómeno físico a partir de los elementos esenciales y de la interrelación entre el modelo, formalismo matemático y fenomenología del concepto considerado

Etapas:

1. Concebir la realización de la actividad de estudio, como respuesta a ciertas preguntas o como parte de la solución de un problema.
2. Identificar las magnitudes, propiedades esenciales y parámetros del fenómeno observado. Definir los elementos esenciales y el concepto del fenómeno observado.
3. Formular una situación-problema del objeto estudiado.
4. Analizar la situación-problema. Hacer la representación y solución del problema.
Describir los factores que son indispensables para la solución del problema propuesto; la transformación del objeto de estudio.
5. Modelar el objeto del estudio: Definir las magnitudes, parámetros y atributos necesarios y suficientes, elaborar la formulación matemática de la solución del problema.
6. Realizar la experimentación del modelo planteado o simular la formulación matemática de la modelación de la solución del problema, reproducir el fenómeno previsto y hacer las observaciones, las mediciones y registrar los datos.
7. Analizar los resultados de la experimentación en relación al conocimiento disponible de la ciencia Física, favoreciendo la revisión de la modelación inicialmente elaborada.
8. Elaborar un esquema lógico de los conceptos implicados en la actividad de estudio.
9. Generalizar y reflejar el concepto estudiado, profundizar en diferentes aspectos la situación física examinada, concebir su traslación a otros contextos y aplicabilidad.

Considerando un entorno más general, es posible determinar los objetivos educativo-instructivos de cada contenido temático, esto se fundamenta con el criterio de que el objeto de estudio de la Física, como disciplina, es el Cuadro Físico del Mundo (Teoría Mecánica Clásica, Teoría Electromagnética, y Teoría Cuántico-Relativista) y el objeto de estudio de cada asignatura de Física es, en particular, una teoría física.

La condición de la organización correcta de la actividad de estudio es el planteo, ante los estudiantes, de la tarea de estudio, cuya resolución requiere de ellos la experimentación con el material de estudio. A continuación se exponen, a manera de ejemplo para la aplicación de actividades de estudio tipo I y II, algunas tareas de estudio genéricas.

1. Establecer relación entre una determinada magnitud, su patrón y el grado de incertidumbre de dicho patrón con respecto a una medida, para lo cual es necesario explicar los criterios de utilización de cifras significativas.
2. Describir cuales son los factores principales que influyen en los errores en una experimentación, considerando que el resultado de una medida posee un número limitado de cifras significativas. Esto es debido a la limitación de la precisión de cualquier instrumento de medida utilizado. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la naturaleza del instrumento no es el único factor para influenciar en el resultado de una medida.
3. Mostrar que los errores en una experimentación (estadísticos), que responden a un gran número de causas, obedecen a leyes matemáticas que permiten arribar a conclusiones importantes sobre un fenómeno dado, aún cuando las medidas están sujetas a errores
4. Describir leyes físicas y formularlas matemáticamente.

5. Deducir e interpretar ecuaciones en forma diferencial analizando en ellas los fenómenos implicados.
6. Determinar las características y la interrelación entre conceptos físicos.
7. Caracterizar un determinado fenómeno físico y sus elementos esenciales.
8. Analizar el proceso de transmisión energética, a partir de la energía potencial y la cinética.
9. Caracterizar, interpretar y verificar la conservación de la energía mecánica de un sistema.
10. Obtener e interpretar la posición de centro de masa de un sistema de partículas.
11. Deducir e interpretar en forma integral el impulso de una fuerza aplicada a un cuerpo
12. Caracterizar la energía cinética de la partícula en términos del momento lineal.
13. Definir momento, para un sistema de partículas.
14. Deducir del momento para un sistema de partículas.
15. Interpretar la ley de conservación del momento para un sistema de partículas.
16. Interpretar el concepto de energía cinética de un sistema de partículas.

Las clases en este modelo didáctico tienen un carácter diferenciado, es decir, su implementación tiene un carácter sistémico, donde la comprobación del desarrollo del aprendizaje desempeña un importante papel en la retroalimentación del proceso.

En el sistema didáctico revisado aquí, esta evaluación se realiza a través de los siguientes elementos:

- Actividad de estudio de Física. El acompañamiento y control del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física es realizado a través de las actividades de estudio, informando y retroalimentando el proceso.

- Evaluación final. Aplicar exámenes de evaluación del contenido considerando la estructura: pregunta teórica de desarrollo conceptual; pregunta de aplicación de situación problema; y preguntas que usan análisis con argumentación, usando las características esenciales para la deducción.

La implementación del sistema didáctico es realizada a través de sus componentes caracterizados con funciones y procedimientos específicamente planeados para esta finalidad y a través de las etapas específicas en correspondencia con el proceso de sistematización del modelo de desarrollo operacional del sistema didáctico y que pudiera desarrollarse de la siguiente forma:

- Análisis y reajuste del programa analítico de las asignaturas relacionadas con Física.
- Elaboración de las tareas de estudio.
- Adecuación de los medios de enseñanza con el contenido de la asignatura.
- Organización y dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Física.
- Organización de las clases.
- Práctica docente.
- Aplicación de las actividades de estudio de Física. Metodología de enseñanza de la Física, a través de las tareas de estudio.
- Control del proceso.
- Evaluación.

Esta concepción de la enseñanza-aprendizaje ofrece un enfoque sistémico de la asignatura, proporcionando un control a lo largo de todo el proceso, de forma tal que el profesor traslada la atención del resultado del proceso, (es decir, de su aspecto cuantitativo, que evidencia tan sólo la medición de los resultados finales), al aspecto cualitativo de las etapas a través de las cuales transcurre el proceso, por medio de las actividades de estudio.

En correspondencia con el análisis realizado, es posible arribar finalmente a una revisión de algunos elementos de contenido físico-matemático; considerando unificar criterios del enfoque interdisciplinario, y del enfoque didáctico en relación con el Cuadro Físico del Mundo (referido con anterioridad). En el estadio inicial de una teoría física el papel de las Matemáticas es, fundamentalmente el de un lenguaje, aquél en el que se expresan ideas e intuiciones. En un estadio posterior, la teoría necesita de una mayor formalización y rigor en la definición de las hipótesis y su ulterior desarrollo. En este punto el carácter generativo de las Matemáticas pasa a un primer plano, ampliando las capacidades de la teoría desde el punto de vista metodológico y fundamental (Alonso, 2003).

En la historia de la Física se tienen ejemplos de dos situaciones típicas. Un ejemplo clásico es el desarrollo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton para dar una descripción de los fenómenos gravitatorios. En el sentido opuesto, en el caso de la relatividad general, A. Einstein encontró en la Geometría Diferencial de Riemann y otros, el lenguaje más apropiado para expresar la relatividad general. En el primer caso, se desarrollan unas matemáticas que se ajustan a la descripción de una realidad física tangible, mientras que en el segundo la teoría matemática estaba allí antes de que los físicos tuviesen noticias de que existían fenómenos que podían ser expresados por ella.

No obstante, un trabajo en Física no se reduce a su expresión matemática. De hecho, en la génesis de una teoría física a menudo se prescinde de elementos que el rigor matemático exigiría considerar, y se emplean objetos que adolecen de una definición matemática precisa. Es el flujo en ambas direcciones, entre Matemáticas y Física, lo que es fructífero y en gran medida objeto de interés en la enseñanza de ambas materias. Una discusión general de todos los aspectos relevantes en este sentido está fuera de los objetivos que aquí se persiguen. Lo que se pretende es

explorar a través de ejemplos de problemas concretos la interrelación entre algún dominio de la Física y las Matemáticas que se emplean.

Resultan de particular interés, algunos sistemas físicos cuánticos, mecánico-estadísticos y algunos fenómenos no lineales, intentando enfatizar más adelante, en la relación entre la definición de las nociones físicas y los objetos matemáticos asociados. En todos los casos hay un primer estadio en el que la teoría física, aunque escrita en lenguaje matemático poco riguroso, está basada en hipótesis que son difíciles de precisar. A posteriori aparece mayor formalización y rigor, siendo ahí donde las Matemáticas involucradas (Cálculo Diferencial, Teoría de Operadores Lineales, Análisis Asintótico, Geometría Diferencial, Integración Funcional, Procesos Estocásticos y Geometría Fractal, entre otras) permiten una consolidación de las hipótesis, dando lugar a extensiones de la teoría.

El mundo microscópico. Sistemas físicos cuánticos.

A medida que las habilidades y técnicas lo han permitido se ha accedido a la observación de fenómenos que tienen su explicación en el comportamiento de la materia a escalas muy pequeñas respecto a las escalas cotidianas. La descripción física en estos casos se apoya en la Mecánica Cuántica; en cuyo contexto, la descripción de un conjunto de N partículas es diferente a lo que se haría si las partículas se moviesen acorde a las leyes de Newton. El objeto de partida es una función compleja Ψ (Psi) que depende de N coordenadas y el tiempo t , es decir:

$$(q_1, \dots, q_N) \rightarrow \Psi(q_1, \dots, q_N; t) \in \mathcal{C}$$

Con la información contenida en Ψ se puede obtener el valor de cualquier observación física medible en un laboratorio tras un experimento reproducible. En el lenguaje de la Mecánica Cuántica Ψ se llama: función de ondas. La evolución temporal de la función de ondas está dada en el dominio no relativista por la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, si se conoce la función

de ondas en un instante, sus condiciones de contorno y la solución de la ecuación de Schrödinger, es posible resolver el problema cuántico planteado. La elaboración de la teoría se hace en lenguaje matemático poco riguroso, aunque su formalización posterior sí ha requerido una elaboración más rigurosa. No obstante, existen objetos en la mecánica cuántica que se emplean por parte de los físicos con asiduidad, de los cuales todavía no se tiene una idea clara de a qué objeto matemático corresponden.

El mundo macroscópico. Sistemas físicos con un gran número de partículas.

En la terminología habitual de un físico el término: sistema macroscópico, se refiere a sistemas compuestos por un gran número de partículas (del orden de 10^{23}), y la termodinámica se ocupa del estudio de dichos sistemas. El primer paso para estudiar el comportamiento de un sistema físico es conocer cómo se comportan sus constituyentes. Al referirse a los constituyentes de un sistema microscópico se tiene la Mecánica Cuántica; como la teoría más refinada para describir la dinámica de las partículas. En cierto límite, que se denomina: límite clásico, las predicciones de la Mecánica Cuántica coinciden con las predicciones de la Mecánica de Newton (Mecánica Clásica). En el caso de un sistema mecánico cuántico el límite clásico corresponde a considerar que las acciones típicas del sistema son grandes comparadas con la constante de Planck. Formalmente esto equivale a considerar la constante de Planck como un parámetro pequeño. En los sistemas mecánico-estadísticos el límite clásico consiste en considerar que la temperatura es lo suficientemente alta y la densidad suficientemente baja.

Dependiendo de las condiciones físicas que se consideren se podrá emplear bien la Mecánica Cuántica, o bien la Mecánica Clásica. Por el momento es conveniente pensar que las partículas obedecen las leyes de Newton. Las conclusiones que se extraigan en este contexto son fácilmente extrapolables al caso cuántico. Cualquier magnitud física medible en un experimento

reproducible se puede calcular, en principio, si se conocen las posiciones \mathbf{q}_i y momentos \mathbf{p}_i de todas y cada una de las partículas del sistema. Si el sistema tiene N partículas y está confinado en un espacio tridimensional, la especificación de todas las posiciones y velocidades corresponde a conocerlos $6N$ números, $3N$ de los cuales corresponden a *posiciones* y los restantes $3N$ son *momentos*. Cuando esta información es especificada se dice que se conoce el estado del sistema, es decir:

$$\text{Estado del sistema} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N), \quad \mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$$

El estado del sistema hay que conocerlo en todo instante, y por lo tanto $(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t))$ es función del tiempo. La dependencia en el tiempo implica que se debe conocer la dinámica de las partículas. En este caso, las leyes dinámicas son las de Newton; y para aplicarlas se necesita conocer cuáles son las fuerzas que actúan sobre el sistema. De forma breve, se necesita conocer cómo interaccionan las partículas entre sí, y con su entorno. Aun suponiendo que se tiene este conocimiento, sea por resultados experimentales o bien porque se ha elaborado un modelo matemático, al aplicarlas leyes de Newton se llega a la conclusión de que el conocimiento del estado del sistema implica resolver un sistema de $6N$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en general no lineales. Para la resolución de dicho sistema se necesita conocer además todas las posiciones y momentos de las partículas en el instante inicial. En estos términos, el problema está formalmente planteado; pero hay que pensar un poco en la situación que se tiene.

Primero se ha de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, que son no lineales para la mayoría de sistemas. Esto pasa por obtener soluciones bien exactas o aproximadas, y una vez que esto se ha conseguido se han de sustituir los datos iniciales. También podría optarse por resolver numéricamente las ecuaciones. En principio se tienen 10^{23} ecuaciones diferenciales

acopladas, y suponiendo que se tienen las soluciones en términos de funciones conocidas, si se quiere hacer una predicción, se han de sustituir los datos iniciales y evaluar el valor de las funciones para éstos. Por simplicidad conviene pensar que las soluciones son todas funciones polinómicas de sus argumentos, por ejemplo funciones cuadráticas. En ese caso se tienen unas N^2 operaciones que efectuar. Sin duda un trabajo incongruente que además llevaría un tiempo enorme. Todo esto sin contar con la dificultad de conocer el estado inicial.

Se debe a Boltzmann, Maxwell, Gibbs y otros el desarrollo de la Mecánica Estadística, la cual contribuye a evitar la solución del problema tal y como se ha planteado hasta ahora. Una de las primeras observaciones en el contexto de la Mecánica Clásica fue la constatación de que existen funciones de los estados de un sistema $(Q, P) \rightarrow C(Q, P) \in R$ que son constantes, es decir, si (Q, P) y (Q', P') son dos estados del sistema a dos tiempos distintos, se tiene $C(Q, P) = C(Q', P')$. A las funciones C se les denomina: constantes de movimiento. La observación de los fundadores de la Mecánica Estadística es que las propiedades macroscópicas de un sistema, su comportamiento termodinámico, son consecuencia de unas pocas constantes de movimiento, (un máximo de siete). El resto de las variables, hasta un número de $6N - 7$, se pueden dejar de considerar si se adopta una descripción estadística de los fenómenos que ocurren.

En otros estudios, se intenta explicar la formulación del problema y su evolución desde su estadio más elemental, en el que las Matemáticas se emplean sólo en la expresión de la teoría, hasta alcanzar un estadio más avanzado en el que el carácter de las Matemáticas hacen de la Física un dominio más riguroso y con mayor solidez. El interés radica en evidenciar cómo los fenómenos no lineales que aparecen, quedan descritos por objetos matemáticos elaborados en el contexto del Análisis de Operadores y su espectro, Teoría Ergódica y Teoría de la Medida.

Procesos físicos de colisión de fotones con agujeros negros.

Como otro ejemplo, se aborda el comportamiento de la luz en la vecindad de un sistema de agujeros negros; donde la dinámica de los fotones comienza por fijar la geometría del espacio-tiempo en su entorno. Una vez se tiene la mencionada métrica, la dinámica consiste en el cálculo de las geodésicas en ese espacio-tiempo; el cual se realiza con especial énfasis en las matemáticas apropiadas para describir los procesos en el contexto de la dinámica no lineal.

Sistemas clásicos y su dinámica. Sistemas caóticos.

El siguiente análisis parte de la descripción clásica de la mecánica de los sistemas de partículas, basada en las leyes de Newton. Es conocido que la dinámica de los objetos materiales está gobernada en última instancia por la mecánica cuántica. No obstante, en ciertas condiciones la descripción que dan ambas ramas de la Física es prácticamente la misma, por lo que emplear la mecánica clásica es lícito. En el contexto clásico, un sistema de partículas está caracterizado por las posiciones \mathbf{Q} y los momentos \mathbf{P} de todas las partículas en un instante de tiempo t , consideradas estas como entes puntuales. La evolución dinámica de los momentos y las coordenadas está dada por las leyes de Newton. En una formulación equivalente a la de Newton, llamada de Hamilton, las ecuaciones de movimiento de posiciones y momentos se escriben como

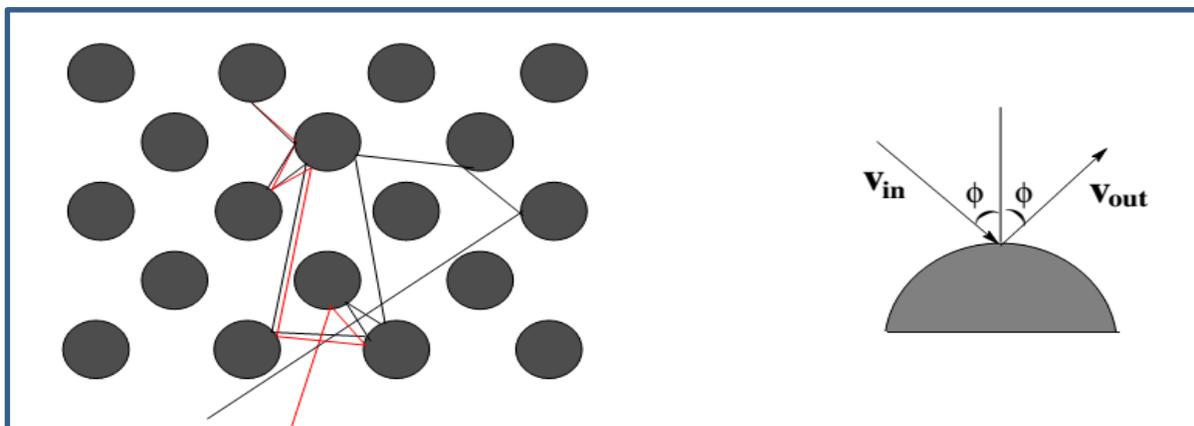
$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad y \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}$$

Donde $H = H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ es una función que depende de las coordenadas y los momentos Landau y Lifshitz (1985). Eventualmente puede depender del tiempo, pero por simplicidad conviene restringirse al caso de sistemas conservativos. La función H se denomina hamiltoniana y equivale a la energía del sistema. Además, juega un papel muy importante en el paso a una descripción mecánico-cuántica del sistema. Para resolver el movimiento hay que integrar las ecuaciones de Hamilton y conocer una condición inicial, por ejemplo disponer de los datos $\mathbf{Q}(t = 0)$ y $\mathbf{P}(t = 0)$.

Si se tiene un sistema de N partículas en un espacio tridimensional, se tendría un sistema de $6N$ ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, y en general no lineales. Una solución del sistema supone una trayectoria que pasa por el punto inicial y traza un gráfico en el espacio de coordenadas y momentos, el espacio de fases. Dicha solución es única. Esto es consecuencia de la existencia y unicidad de soluciones para el problema planteado. El concepto de trayectoria en mecánica clásica resulta útil y tiene su reflejo matemático en las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Hamilton. Conocida, pues, la solución, este conocimiento permite decir dónde se encuentra el sistema en un instante presente t , decir dónde estuvo en el pasado y predecir dónde estará en el futuro. Basta seguir la trayectoria solución del problema.

No obstante, esta afirmación requiere matices que hay que discutir, y para ello se va a tomar un ejemplo concreto. Supóngase que en un plano se disponen un conjunto de discos en una red regular (ver Figura 1), y sea una partícula puntual que viaja libremente entre discos trazando líneas rectas, tal que cuando alcanza a un disco rebota de forma que la componente de la velocidad en la dirección tangente al punto de contacto con el disco se conserva en la colisión, mientras que la componente de la velocidad en la dirección normal al punto de colisión cambia de signo. Una trayectoria típica podría ser la que se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Esquema del movimiento de una partícula puntual en un gas de Lorentz



La trayectoria dibujada representa una de tantas posibles en el sistema, una vez dada la posición y momento inicial de la partícula. Se va a analizar qué ocurre si se considera una trayectoria para la cual la condición inicial difiere ligeramente de la anterior. En ese caso (ver Figura 1) la trayectoria sigue inicialmente un camino muy próximo al de la trayectoria sin perturbar, pero después de algunas colisiones con los discos las dos trayectorias siguen historias diferentes. De hecho, una estimación simple conduce a que si dos condiciones iniciales difieren una de la otra en el n -ésimo dígito, en n colisiones las dos trayectorias diferirán en todos los dígitos.

En el ejemplo que se analiza las dos trayectorias se separan localmente de modo exponencial, de tal forma que la distancia d que hay en todo instante entre la trayectoria de referencia y la perturbada va como: $d \sim e^{\lambda t}$. A la cantidad λ se le conoce como exponente de Liapunov. Un sistema de N partículas en tres dimensiones posee en principio $6N$ exponentes de Liapunov. No obstante, si el sistema conserva la energía sólo $6N - 1$ de ellos son independientes. El máximo de todos ellos es el que define el ritmo de separación entre trayectorias inicialmente próximas.

En Física la condición inicial no es un punto matemático, sino más bien una bola centrada en los datos iniciales con un radio del orden de la incertidumbre experimental. Todos los datos dentro de esa bola son físicamente relevantes. Esta es una de las razones por las que las predicciones atmosféricas actuales tienen una fiabilidad muy corta en el tiempo. A los sistemas que presentan esta sensibilidad a las condiciones iniciales se les denomina sistemas caóticos. En general, un sistema clásico se comporta de forma caótica para un conjunto de condiciones iniciales y de forma regular para otras. De todo lo dicho se concluye que para sistemas caóticos el concepto de trayectoria deja de ser útil como herramienta predictiva, aunque esté perfectamente

definido desde el punto de vista físico y matemático. Una descripción alternativa consiste en introducir una función densidad de condiciones iniciales. No es de interés la evolución de una condición inicial individual, sino la evolución de un conjunto de ellas, distribuidas inicialmente en el espacio de fases acorde a una función $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t = 0)$. Esta cantidad, cuando es multiplicada por un elemento de volumen en el espacio de fases $d\mathbf{Q} d\mathbf{P}$, da el número de condiciones iniciales contenidas en un volumen elemental $d\mathbf{Q} d\mathbf{P}$ centrado en (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) . Si se conociese el valor de la función densidad $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ en un instante posterior t , se podría evaluar el valor medio y momentos superiores Landau y Lifshitz (1980), de cualquier variable dinámica $A(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Por ejemplo, el valor medio de A en el tiempo sería

$$\langle A \rangle_t = \frac{\int \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) A(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) d\mathbf{Q} d\mathbf{P}}{\int \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) d\mathbf{Q} d\mathbf{P}}$$

Se observa cómo en el contexto clásico aparece una descripción probabilística para realizar predicciones producidas por el grado de desconocimiento del estado inicial del sistema, o la imposibilidad de precisar sin ambigüedad tal estado. El esquema introducido es el mismo que se emplea en la descripción estadística de los sistemas macroscópicos. La evolución de la densidad $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ es, por supuesto, consecuencia de la evolución inducida en cada condición inicial por las leyes de *Newton*. La ecuación de movimiento de ρ es la llamada ecuación de Liouville Landau y Lifshitz (1980), dada por

$$\hat{L}_\rho = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{Q}} := \{H, \rho\}$$

Se tiene, por lo tanto, una descripción de los sistemas clásicos en términos de funciones definidas en el espacio de fases (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) . Desde el punto de vista matemático se tiene un espacio de funciones (a definir) en el que las densidades físicas $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, tengan sentido y un operador de evolución cuyas propiedades espectrales pueden ser estudiadas.

Evidentemente, hasta aquí solo se ha abordado una síntesis introductoria a temas comunes de la Física y la Matemática, puesto que los dominios de la Física en los que las Matemáticas están involucradas en mayor o menor medida son mucho más amplios. En ese sentido, se sugiere consultar la bibliografía citada para una mayor profundización en estos temas.

Conclusiones

1. El trabajo interdisciplinar constituye una necesidad ante el cúmulo de información y de conocimientos que se transmiten y la rapidez con que surgen o se adecuan estos en la época contemporánea. El proceso de enseñanza-aprendizaje es, por tanto, el marco ideal para desarrollar el pensamiento interdisciplinar.
2. Resulta imprescindible la adaptación de los currículos para la formación inicial y la capacitación del personal docente que actualmente enfrenta el trabajo educacional y científico sobre bases sustentadas en los enfoques interdisciplinares, propiciando elevar su preparación integral y como resultado, integrar al mundo del trabajo un profesional que con una preparación conveniente enfrente los retos de la contemporaneidad. (Salazar et al., 2020).
3. Adoptar la enseñanza – aprendizaje de la Física basada en la concepción sistémica estructural – funcional del contenido a partir de invariantes, con enfoque fenomenológico de los conceptos físicos y utilizando la actividad de estudio como metodología de trabajo fundamental, permitirá el desarrollo del pensamiento deductivo de los estudiantes y con ello la capacidad de generalización de los conocimientos adquiridos.

Referencias bibliográficas

Alonso, R. D. (2003). *Física y Matemáticas*. Curso Universitario Interdisciplinar. “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas”. Universidad de La Laguna, <http://eru.dfis.ull.es>.

Campelo, J. R. (2003). Un Modelo Didáctico para Enseñanza Aprendizaje de la Física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25(1).

<https://www.scielo.br/j/rbef/a/NGszBmpcgVWR9PDwHp4rRjk/?lang=es>

Landau, L. D., & Lifshitz, E. (1980). *Statistical Physics*. Butterworth - Heinemann.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. (1985). *Mecánica*. Ediciones Reverté.

Perera, F. (1999). *Interdisciplinarietà y Currículum*. Material Científico. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona.

Salazar, E., Quesada, J., & García, R. (2020). Especialización vs interdisciplinaridad un acercamiento desde el enfoque dialéctico materialista. (Revisión). *Roca. Revista científica - Educacional De La Provincia Granma*, 16(1), 1407-1416.

<https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca/article/view/2100>