REDEL. Revista Granmense de Desarrollo Local.
Vol.16. 2020. ISSN: 2664-3065. RNPS: 2448. redel@udg.co.cu
http://redel.udg.co.cu

Revisión

Teorema de Pitágoras. Recursos didácticos para calcular volumen de cuerpos regulares

Pitagoras Theorem. Didactic resources to calculate volume of regular bodies

Lic. Héctor Mora Silveira, Licenciado en Educación en Física y Electrónica, Instructor, Universidad de Granma, Cuba, hmoras@udg.co.cu

M. Sc. Félix Alberto Garcés Perdomo. Máster en Ciencias de la Educación Mención Secundaria Básica, Profesor Auxiliar, Universidad de Granma, Cuba, fgarcesp@udg.co.cu

Resumen

En este trabajo, se presenta una investigación acerca del análisis de la aplicación del Teorema de Pitágoras para determinar el volumen de los cuerpos regulares en el espacio, partiendo de la relación que existe entre las áreas de las distintas figuras geométricas, asumiendo los criterios de comparación y analogía. El objetivo de esta investigación es indagar de qué factores depende el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre las relaciones para obtener un coeficiente de proporcionalidad que permita el resultado esperado. Los resultados obtenidos muestran evidencias de un acercamiento a soluciones que permitan a los profesores lograr estos objetivos y, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos.

Palabras claves: Teorema de Pitágoras; cuerpos geométricos; volumen; coeficiente de proporcionalidad.

Abstract

In this work is shaven an investigation about the analysis of the application of the Pitagoras Theorem to decide the volume of the regular bodies in the space, starting from the relationship existing among the areas of different geometrics figures assuming the comparatives and analogic criteria? The aim of this research is to find out of what factors depend a calculation of the volume of the geometric bodies and explore the influence of the study and application of the perspective elements over the relationship for obtaining a coefficient of the proporcionality that allow the expective results. The obtained results showed evidences of an approach to solutions that leads out teachers for aiming this objective and comprehend the need to teach tridimentional geometry based on concepts that leads students to handle rightly the mathematics knowledegment.

Key words: Theorem of Pitagoras; geometric bodies; volume; coefficient of proporcionality.

Introducción

La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación especial que llamamos matematización, que se podría describir cómo sigue. Se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de estas percepciones lo que es común, abstraíble, y someterlo a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones (De Guzmán 1996 p. 15).

Actualmente, el teorema de Pitágoras, se constituye en una herramienta invaluable, que al ser aplicada en las más grandes obras de Ingeniería muestra su baluarte, entre los diversos aportes intelectuales que se apropian para aplicarlos a la cotidianeidad, donde quizás nadie puede escapar a su grandeza. El Teorema de Pitágoras ha tenido ocupados a los matemáticos desde la época clásica hasta el presente…. Sus múltiples demostraciones ilustran la agilidad de los matemáticos al atacar el mismo problema desde ángulos diferentes…. Con independencia de la frescura con que se demuestre, el Teorema de Pitágoras logra siempre retener su belleza, su frescura y su eterno sentido de admiración. Dunham. (1995).

Los autores apoyados en los criterios autorizados de algunos matemáticos estudiosos de la Didáctica de la Matemática asumieron los que exponen a continuación para el desarrollo de su investigación:

En base a la hipótesis del origen social del conocimiento, se arman los nuevos conocimientos emergentes en los procesos de síntesis de los viejos conocimientos Martínez. (2005)

Se ha observado que la enseñanza específica aumenta la posibilidad de que los estudiantes manejen las relaciones entre los cuerpos geométricos y sus representaciones planas Gutiérrez. (1998).

La visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes en forma efectiva para descubrir conceptos matemáticos e interpretarlos (Cantoral y Montiel, 2003, p.8).

En este trabajo se realiza un estudio de algunas heurísticas para calcular el volumen de algunos sólidos, partiendo de la interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras que se estudia en la enseñanza media y utilizando el criterio de comparación y analogía.

Para su desarrollo, se tuvo en cuenta el interés de los autores por la historia de las matemáticas y aún más por tratar de reconocer algunas de las formas en que el estudio de la historia puede contribuir a la educación matemática y complementar la formación de los docentes de matemáticas.

Desarrollo

Análisis Teórico y Contenidos básicos.

1. Teorema de Pitágoras.
2. Números pitagóricos.
3. Cálculo del área de figuras planas.

1.- Teorema de Pitágoras:

El teorema establece que: $A_c = A_a + A_b$; donde: $A_c = c^2$; $A_b = b^2$; $A_a = a^2$

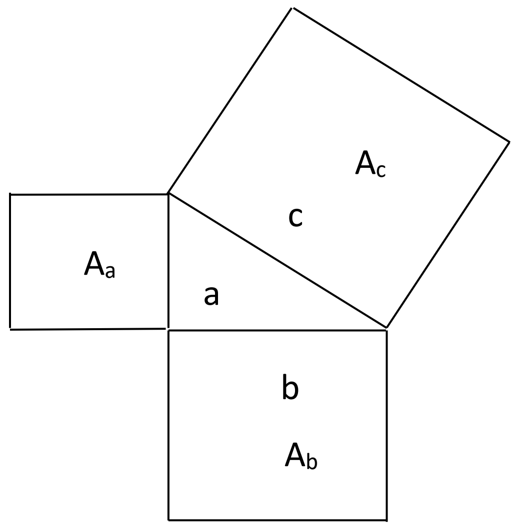


Figura Nº 1

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (1)$$ Ecuación matemática del Teorema de Pitágoras.

2.- Números pitagóricos:

• Determinación de los números pitagóricos: $a, \quad b, \quad c$

Sea que: $(m,n) \in \aleph;\ con\ \ m \neq n\ \ y$ m > n, entonces:

$$a = m \cdot n \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

• Sea que: $(m,n) \in \aleph;\ \forall\ \ m \neq n$, entonces:

$$a = m, \quad b = m \cdot n \quad c^2 = m^2 + m^2 \cdot n^2 = m^2(1 + n^2) \quad c = m\sqrt{1 + n^2}$$

• Sea que: $(m,n) \in \aleph;\ \forall\ \ m = n$, entonces: $a = m,\ b = n$, tenemos que: $c = \sqrt{2}m$

• Sea que: $m \in \aleph;\ \forall\ \ m$, donde: $a = m,\ b = 2m$, entonces: $c = \sqrt{5}m$

El primer conjunto de números pitagóricos está formado por los valores de: $a = 3; \quad b = 4; \quad c = 5$

• Si hacemos $k = 2,3,4,5,\ldots,n$ valores, entonces podemos obtener los demás tríos de números pitagóricos de la forma siguiente: $a = 3k; \quad b = 4k; \quad c = 5k$

Ejemplo: Para $k = 2$, tenemos el siguiente trío de números pitagóricos: $a = 6; \quad b = 8; \quad c = 10$; así sucesivamente para los demás valores de k.

Estos valores de $a,\ \ b,\ c$ como resultado de multiplicarlo por el valor de k cumplen con la ecuación Nº 1.

• Si tenemos que $a = 1,2,3,\ldots,n$ y $b = 1,2,3,\ldots,n$; donde $a = b$, entonces: $c = a\sqrt{2}\quad o\quad c = b\sqrt{2}$ los cuales también cumplen con la ecuación Nº 1.

• Si $a \neq b$ y toman cualquier valor desde $(1,2,3,\ldots,n)$, entonces por la ecuación Nº 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

– Si $a = k\quad y\quad b = 2k$ donde $k = 2,3,4,5,\ldots,n$; entonces por la ecuación Nº1, $c = a\sqrt{5}$; estos valores se corresponden con la ecuación Nº 1. (Teorema de Pitágoras).

3.- Cálculo del área de otras figuras en el plano.

Tomando como modelo la figura Nº 1 y con los valores de $a,\ \ b,\ \ c$ se pueden dibujar otras figuras geométricas en el plano en los que es válida la ecuación Nº 1 para determinar sus áreas y comprobar que se cumple que:

$$A_c = A_a + A_b \sim c^2 = a^2 + b^2$$

Como ejemplos de estas figuras tenemos:

1.- Triángulos equiláteros de lados $a,\ \ b,\ \ c$; donde sus áreas se pueden determinar por las fórmulas conocidas:

- $A_\Delta = \frac{1}{2} A_B \cdot h \qquad donde: A_B \rightarrow área\ \ de\ \ la\ \ base\ \ y\ \ h \rightarrow altura$
- Fórmula de Herón. $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \ y\ \ p = \frac{1}{2}(a+b+c) \rightarrow semiperímetro$
- $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot \mathrm{b} \cdot sen\angle(a,b)\quad ;\quad donde: \angle(a,b)\ es\ el\ ángulo\ formado\ entre\ a\ y\ b.$

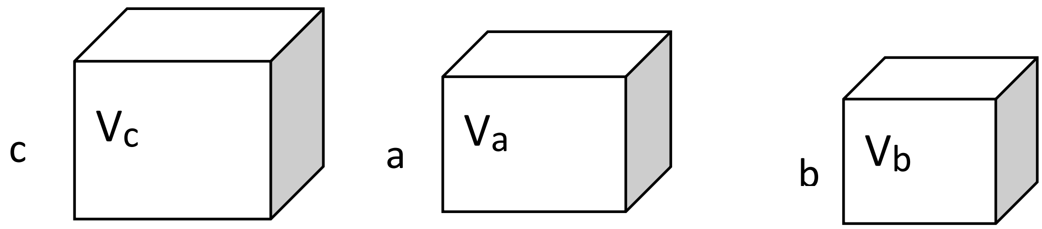
2.- Círculos y semicírculos de diámetros $D = a = b = c$ o radios $r_a = \frac{a}{2};\quad r_b = \frac{b}{2}\quad y\quad r_c = \frac{c}{2}$. En estos casos podemos hallar las áreas por: $A_{\text{O}} = \pi r^2\quad y\quad A_{\text{O}} = \frac{\pi}{4} D^2$

Hasta aquí hemos comprobado que el teorema de Pitágoras nos permite establecer la relación que existe entre las áreas de las distintas figuras geométricas dados los valores de $a,\ \ b,\ \ c$ y que además se cumple que: $\boxed{A_c = A_a + A_b}$

¿Se cumplirá dicho teorema para determinar el volumen de los cuerpos regulares en el espacio? ¿Cómo determinar dicho volumen y sus relaciones?

Para dar respuesta a estas interrogantes realicemos el siguiente análisis matemático.

1.- Analicemos el caso para el cuerpo más simple: un cubo de arista **a, b, c.**



Verifiquemos si se cumple: $\boxed{V_c = V_a + V_b}$ (2)

Si $V_c = c^3;\quad V_a = a^3 \quad y \quad V_b = b^3$ entonces: $\boxed{c^3 = a^3 + b^3}$ (3) Esta sería la expresión del teorema de Pitágoras en el espacio.

Comprobemos con los valores: $a = 3u;\quad b = 4u;\quad c = 5u$

Sustituyendo en (3)

$(5u)^3 = (3u)^3 + (4u)^3$

$125u^3 = 27u^3 + 64u^3$

$125u^3 \neq 91u^3 \qquad Luego \quad c^3 \neq a^3 + b^3$

La ecuación (2) no se cumple, por tanto $V_c \neq V_a + V_b$ y $c^3 \neq a^3 + b^3$

Para que se cumpla la ecuación (2) debemos introducir un coeficiente de proporcionalidad, el cual lo obtenemos como resultado de:

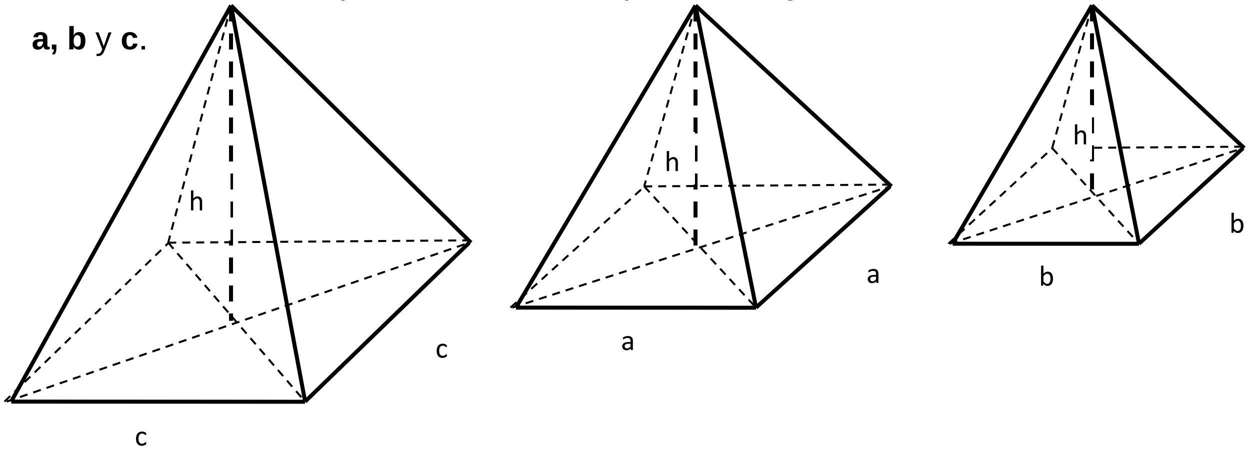
$$\frac{V_c}{V_a + V_b} = \frac{c^3}{a^3 + b^3} = \frac{125u^3}{91u^3} \approx 1{,}373626373626\ldots$$

Dicho coeficiente lo denotaremos con la letra H.

$$\boxed{H = 1{,}373626373626\ldots}$$

Entonces tendríamos que: $\boxed{V_c = H(V_a + V_b)}$ (4) y que: $\boxed{c^3 = H(a^3 + b^3)}$ (5)

2.- Analicemos ahora para el caso de una pirámide regular de base cuadrada de altura **h** y aristas **a, b** y **c**.



Verifiquemos si se cumple:

El volumen de una pirámide se determina como:

$\boxed{V=\frac{1}{3}A_B\cdot h}$ (6) $\boxed{V_c=V_a+V_b}$ (2)

En las figuras podemos determinar **h** aplicando el Teorema de Pitágoras: $h_c=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c;\quad h_a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a;\quad h_b=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b.$

Luego tenemos que de (2) y (6)

$$V_c=\frac{1}{3}c^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{\sqrt{2}}{6}c^3 \qquad V_a=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \qquad V_b=\frac{1}{3}b^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6}c^3=\frac{\sqrt{2}}{6}\left(a^3+b^3\right)\rightarrow c^3=a^3+b^3$$

Esto, ya lo habíamos verificado que no se cumple. La ecuación $\boxed{V_c=V_a+V_b}$ (2) tampoco se cumple.

Entonces se hace necesario multiplicar por H a la suma de V_a+V_b para obtener V_c

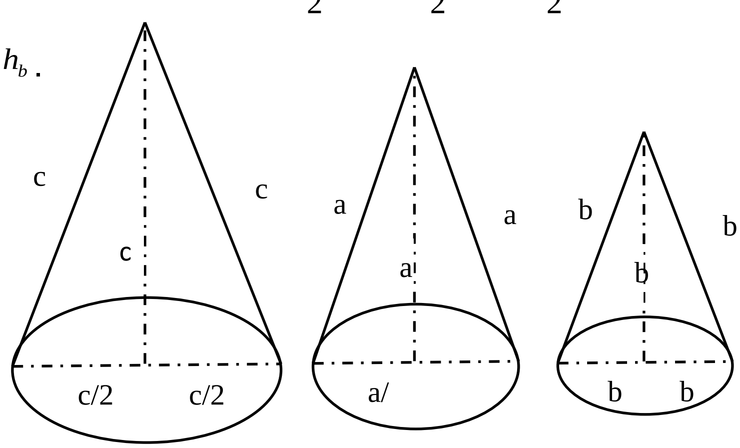
$$\boxed{V_c=H\left(V_a+V_b\right) \qquad y \qquad c^3=H\left(a^3+b^3\right)}$$

En el caso particular en que $h=c;\quad h=a;\quad h=b$ entonces: $V_c=\frac{1}{3}c^3;\quad V_a=\frac{1}{3}a^3;\quad V_b=\frac{1}{3}b^3.$

Se vuelve a verificar que: $V_c\neq V_a+V_b \qquad \frac{1}{3}c^3=\frac{1}{3}\left(a^3+b^3\right)\rightarrow c^3\neq a^3+b^3$

Para que se cumpla: $\boxed{V_c=H\left(V_a+V_b\right) \qquad y \qquad c^3=H\left(a^3+b^3\right)}$

3.- Analicemos ahora para el caso de un cono regular recto cuya base es de diámetros $D=c;\ D=a;\ D=b$ y radios $r_c=\frac{c}{2};\quad r_a=\frac{a}{2};\quad r_b=\frac{b}{2}.$ Las generatrices $c,\ a,\ b\quad y\quad las\quad alturas\ h_c;\ h_a;\ h_b$.



Verifiquemos si se cumple: $\boxed{V_c = V_a + V_b}$ 2

El volumen del cono se determina por: $V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

De las figuras podemos determinar **h** aplicando el Teorema de Pitágoras y $h = \sqrt{3} \cdot r$; sustituyendo los valores de $r_c;\ r_a;\ r_b$ tenemos $h_c = \frac{\sqrt{3}}{2} c;\quad h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a;\quad h_b = \frac{\sqrt{3}}{2} b.$ Entonces:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi \cdot c^3 \qquad V_a = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi \cdot a^3 \qquad V_b = \frac{1}{3}\pi \frac{b^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi \cdot b^3$$

Sustituyendo $V_c;\ V_a;\ V_b$ en la ecuación tenemos: $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi \cdot c^3 = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi \cdot \left(a^3 + b^3\right) \rightarrow c^3 = a^3 + b^3$

Por lo que llegamos a los mismos resultados que en los casos anteriores: $c^3 \neq a^3 + b^3 \quad y \quad V_c \neq V_a + V_b$

Debemos multiplicar por H a las sumas de $V_a + V_b$ y $a^3 + b^3$ $\boxed{V_c = H(V_a + V_b)\ y\ c^3 = H\left(a^3 + b^3\right)}$

En el caso particular en que $h = c;\quad h = a;\quad h = b$, entonces sustituyendo en $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ tenemos que:

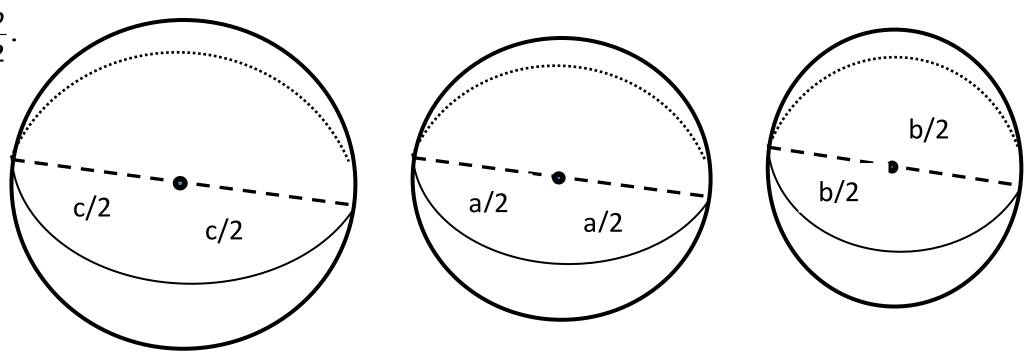
$$V_c = \frac{\pi}{12} c^3;\quad V_a = \frac{\pi}{12} a^3;\quad V_b = \frac{\pi}{12} b^3.$$

Comprobando por la ecuación 2 $\frac{\pi}{12} \cdot c^3 = \frac{\pi}{12} \cdot \left(a^3 + b^3\right) \rightarrow c^3 = a^3 + b^3$ llegando a los mismos resultados que el caso anterior: $V_c \neq V_a + V_b \quad y \quad c^3 \neq a^3 + b^3$

Para que se cumpla la igualdad multiplicamos por H el miembro derecho:

$$\boxed{V_c = H(V_a + V_b) \qquad y \qquad c^3 = H\left(a^3 + b^3\right)}$$

4.- Analicemos ahora para el caso de una esfera de diámetros $D = c;\ D = a;\ D = b$ y radios $r_c = \frac{c}{2};\quad r_a = \frac{a}{2};\quad r_b = \frac{b}{2}.$



Verifiquemos si se cumple: $\boxed{V_c = V_a + V_b}$ 2

Sabemos que el volumen de una esfera se determina como:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ $\quad V_c = \frac{4}{3}\pi \cdot r_c^{\,3} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{c^3}{8} = \frac{\pi}{6}c^3$

Por el mismo razonamiento tenemos que: $V_a = \frac{\pi}{6}a^3$; $V_b = \frac{\pi}{6}b^3$. Sustituyendo estos valores en tenemos: 2

$$\frac{\pi}{6}\cdot c^3 = \frac{\pi}{6}\cdot\left(a^3 + b^3\right) \rightarrow c^3 = a^3 + b^3$$

Llegamos a ecuación 3 del primer ejemplo.

Verificando para los de $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$ comprobamos que: $c^3 \neq a^3 + b^3$, entonces para que se cumpla la ecuación 3 debemos multiplicar el miembro derecho por H y nos quedaría:

$$\boxed{c^3 = H\left(a^3 + b^3\right)}$$

En el caso de una semiesfera basta con dividir volúmenes V_c; V_a; V_b por dos y aplicar el mismo procedimiento.

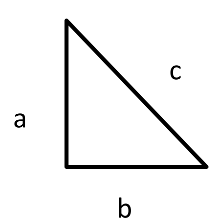
Analicemos un caso particular de la aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular el volumen de un cuerpo analizado.

Caso. Cuando los catetos a y b son iguales ($a = b$)

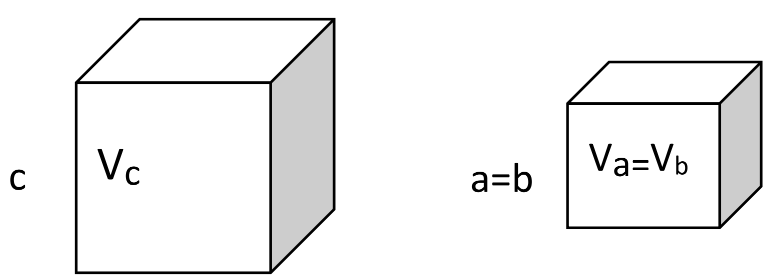
Análisis del caso. (Cuando $a = b$); $a = 1,2,3,\ldots,n$; $\quad b = 1,2,3,\ldots,n$

Por Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{2}a \quad o \quad c = \sqrt{2}b$



Verifiquemos si se cumple para $V_c = V_a + V_b$ en el caso de un cubo.



$V_a = V_b = a^3 = b^3$ 2

$V_c = c^3 = 2\sqrt{2}a^3 = 2\sqrt{2}b^3$ $\qquad V_c = V_a + V_b$

$c^3 = a^3 + b^3$ 3 Como $a = b$ $\quad c^3 = 2a^3$

Comprobando con 2 y 3 tenemos: $V_c = c^3 = 2\sqrt{2}a^3 = 2\sqrt{2}b^3$

$V_a + V_b = a^3 + b^3 = 2a^3 = 2b^3$ Vemos que:

$V_c \neq V_a + V_b \quad y \quad c^3 \neq a^3 + b^3$ Busquemos la razón entre ellos:

$\dfrac{V_c}{V_a + V_b} = \dfrac{c^3}{2a^3} = \dfrac{c^3}{2b^3} = \dfrac{2\sqrt{2}b^3}{2b^3} = \sqrt{2}$ Para que se cumpla, el miembro derecho de las ecuaciones 2 y 3 deben multiplicarse

por el coeficiente de proporcionalidad $M = \sqrt{2}$; entonces:

$V_c = M(V_a + V_b) \qquad c^3 = M(a^3 + b^3) \qquad c^3 = 2Ma^3 = 2Mb^3$

Estas son las ecuaciones para determinar los volúmenes de la pirámide, cilindro, cono y esfera.

Conclusiones

1. El cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos regulares se puede realizar aplicando elementos de perspectiva sobre las relaciones que establece el Teorema de Pitágoras para obtener un coeficiente de proporcionalidad que permita el resultado esperado.
2. Asumiendo los criterios de comparación y analogía y partiendo de la relación que existe entre las áreas de las distintas figuras geométricas se puede determinar el volumen de algunos cuerpos regulares en el espacio aplicando del Teorema de Pitágoras.
3. Los resultados obtenidos muestran evidencias de un acercamiento a soluciones que permitan a los profesores lograr estos objetivos y, que comprendan la necesidad de enseñar la geometría tridimensional.

Referencias bibliográficas

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los* cuerpos a través de sus representaciones. Tesis que para obtener el grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). *Una representación visual del polinomio de Lagrange.* Números. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, 55, pp. 3-22.

De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización. Ensayos de visualización en análisis* matemático. Madrid: Pirámide.

Dunham, W. (1995). *El Universo de las Matemáticas.* Madrid: Pirámide, p. 136-153.

Gutiérrez, A. (1998). *Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la* enseñanza de la Geometría espacial. Revista Ema. Vol. 3, N° 3, 193-220.

Haldane, P. (2011). *El Teorema de Pitágoras. Construcción de algunos recursos* Exactas y didácticos. Tesis que para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Naturales.

Martínez, G. (2005). *Los procesos de convención matemática como generadores de* conocimiento. Relime Vol. 8 (2), 195 - 218.

Monteagudo, Y. E. y Rivero, M. (2016). *Material didáctico para la resolución de problemas* sobre cálculo de volumen de cuerpos geométricos en la educación preuniversitaria Disponible en: http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/05/geometria.html.

Paz, A. (1977a). Geometría. Matemática Tercer Curso. Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

Paz, A. (1977b). *Geometría. Matemática Cuarto Curso.* Ciudad de La Habana. Editorial Pueblo y Educación.