OLIMPIA. Revista de la Facultad de Cultura Física de la Universidad de Granma.
Vol.15 No.50, julio - septiembre 2018. ISSN: 1817- 9088. RNPS: 2067. olimpia@udg.co.cu

Original

MODELACIÓN DE LANZAMIENTOS DE PELOTAS CON EL USO DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Modeling the ball throw with the quadratic functions use

M Sc. Raúl Recio-Avilés, Profesor Auxiliar, Universidad de Granma. Bayamo, Cuba,
rrecioa@udg.co.cu

Recibido: 09/05/2018 – 10/06/2018

RESUMEN

En este trabajo se analizan aspectos que manifiestan la importancia del uso de la modelación matemática en el aprendizaje de los estudiantes mediante el uso de una metodología que guía el trabajo de solución del problema planteado mediante el uso de una función cuadrática que es modelada con el uso del método de los mínimos cuadrados, el rresultado obtenido propicia el estudio de los tiros a puntos situados a distancias determinadas.
Palabras claves: modelos matemáticos, mínimos cuadrados, funciones cuadráticas, lanzamientos a distancia.

ABSTRACT

This work examine aspects that manifest the importance use of mathematical modelation in the students's learning, by the use of a methodology that guide the work of solution of the problem presented by means of the use of a quadratic functions that is modeled with the use of the method of least squares, the result obtained propitiates the study of the throws to points placed to determined distances.
Key words: Mathematical models, least squares, quadratic functions, long-distance throw.

INTRODUCCIÓN

Desde que la realidad social es una dimensión importante en el aprendizaje de la Matemática, el contexto que se encuentra formando parte de ella y de la actividad de los estudiantes es un campo propicio para las aplicaciones de la Matemática; cómo consecuencia de esto se consolida en el ámbito internacional el área de investigación denominada Modelling and Applications in Mathematics Education . (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007)

Lo que favorece que en el aprendizaje de la Matemática se presenten problemas y que estudian su solución en contextos significativos para los estudiantes, aplicando en su resolución la modelación matemática como método de solución, lo que aporta no solo conocimientos sino también habilidades en el desarrollo del pensamiento matemático para resolver problemas aplicando la matemática como herramienta de trabajo importante para la preparación del estudiante, según Araujo (2009) la modelación puede ser entendida como una manera de resolver problemas de la realidad usando la matemática.

También se puede argumentar la modelación como una actividad matemática que se desarrolla en las aulas o fuera de ella y que consiste fundamentalmente en un proceso, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa, en este proceso, se producen descubrimientos que modifican la actuación del estudiante ante la clase y el estudio de la Matemática, construyendo su conocimiento sobre la modificación del anterior.

En este trabajo se entiende por modelación a la acción de construir modelos y a estos como objetos que permitan describir un contexto mediante datos relacionados y con el uso de funciones matemáticas; este proceso desempeñan una motivación para el aprendizaje, el uso de la modelación en las actividades matemáticas se realiza considerando la modelación aplicada a otras disciplinas y prácticas de enseñanza y aprendizaje que permiten el uso de tecnologías informáticas para resolver diferentes tipos de problemas, los aportes de la tecnología a la modelación permite la implementación de esta como proceso y recurso en el aula de Matemáticas (Villa, 2009, (Villa y Ruiz, 2009).

En este trabajo se presenta la información a los estudiantes con el uso de tablas y se resuelve el problema con o sin el uso de tecnologías informáticas, esto en los problemas de modelación es necesario aunque en ocasiones el uso de métodos matemáticos contribuyen a la solución.

La importancia de la modelación en el aprendizaje contextual de la Matemática se manifiesta según Hitt (2002) debido a que los conceptos matemáticos surgen en ciertos contextos, y el proceso de formalización de la Matemática los descontextualiza. Así una de las tareas del profesor es recontextualizar los contenidos matemáticos y en ese empeño la modelación matemática es un procedimiento insustituible.

Para la presentación de la información del contexto se utilizarán de forma general las tablas, los gráficos y los problemas verbales. También se realizará un estudio sobre procedimientos utilizados para resolver problema en los que se aplique la modelación de las funciones cuadráticas que es uno de los modelos que con mayor regularidad se sistematiza en las clases de Matemática de los diferentes niveles de enseñanza.

La modelación es un método Matemática que se basa en la aplicación del método científico y el profesor debe ocuparse de formular problemas contextualizados para que faciliten aplicar y construir modelos para explicar fenómenos, resolver problemas de otras ciencias, dichos modelos emergen en contextos que comúnmente no ha sido abordados o se abordan desde una perspectiva diferente al interior estudio, el profesor de Matemática debe promover la elaboración e interpretación de modelos (Villa-Ochoa, 2009), en los que se consideren las particularidades del contexto y los problemas objetos de estudio.

La complejidad de los problemas y de la modelación matemática, vista como un proceso cognoscitivo, impiden que las acciones para interpretar contextos, construir o interpretar un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en la literatura como ciclo de la modelación. (Villa, 2007), lo que a veces no facilita la aplicación debida de esta en el proceso de enseñanza aprendizaje, sin embargo, las ventajas que este proceso ofrece a los estudiantes puede justificar esa aparente pérdida de tiempo.

DESARROLLO

Para la solución del problema se deben realizar un conjunto de análisis que contribuyan a que los estudiantes se relacionen con el contexto objeto de investigación o de estudio donde se pueden utilizar herramientas para representar conocimientos, esto posibilita que los estudiantes puedan enfrentar con éxito la comprensión de la construcción del modelo que es una herramienta teórica para resolver el problema, luego de esto se utilizan procedimientos con herramientas matemática y(o) tecnológicas para resolver el problema con el uso del modelo construido, de la cual se desprenden las conclusiones sobre la utilización del modelo.

Algunos autores llaman a este análisis validación del modelo y luego se procede a las interpretaciones de la solución; estas conclusiones deben ser posteriormente interpretadas a la luz del contexto u otro objeto de investigación. En la búsqueda de la coherencia entre las conclusiones del modelo y el objeto, se plantean estrategias de evaluación y validación. Si después de la validación, el modelo está acorde con el fenómeno o problema, finaliza el ciclo.

(Villa-Ochoa, 2009), este autor describe el objeto de investigación como fenómeno o problema.

Las fases para algunos autores se denominan etapas y constituyen elementos que integran las partes de una metodología que organiza de forma lógica las tareas que realizan los investigadores y estudiantes para resolver el problema, estas están relacionadas con el tipo de problema y los procedimientos de solución, en este trabajo se usará una metodología sencilla conocida como de la modelación matemática. Y los problemas se contextualizarán a la actividad propias de la educación física y el tiro de pelotas.

También se debe considerar que la solución del problema debe ser utilizada para tomar una decisión que implique una mejora en los resultados en el caso objeto de estudio la decisión técnica está encaminada a disminuir la altura del tiro buscando una mayor rapidez en la llegada de la pelota al receptor del tiro.

Las etapas que se cumplimentan en esta metodología son las siguientes.

a) Estudio del contexto.
b) Detectar o simular problemas y formularlos.
c) Construir el modelo.
d) Aplicar procedimientos de solución.
e) Revisar el procedimiento y la solución obtenida.
f) Interpretar la solución considerando el contexto.
g) Tomar la decisión.

Es preciso plantear que la presentación de una metodología no es para precisar al estudiante a realizar la solución de una forma determinada sino para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico a partir de una propuesta inicial del ordenamiento del trabajo, como se puede observar hay etapas que se pueden realizar simultáneamente.

En esta metodología existen algunas etapas que usualmente no se presentan en otras, el análisis del contexto es importante debido a que esto permite analizar y aplicar conocimiento de otras disciplinas y facilita a los estudiantes comprender el problema a para luego construir el modelo, también le facilita analizar la solución y validar el modelo, interpretar la solución y tomar la decisión.

Es importante precisar que la modelación se realiza en base a un problema que se desea resolver y cuya solución lleva un mensaje sobre lo que se debe hacer con la solución encontrada, en esto el profesor debe de tener especial cuidado, si al formular los problemas no se plantea este detalle, esto posibilita una mayor efectividad en el aprendizaje del uso de la Matemática para resolver problemas y fundamenta la importancia de su estudio.

Un elemento de importancia es el registro de representación de los datos del problema en este trabajo se pueden adoptar, la representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfica cartesiano, el registro de representación tabular y el registro de representación simbólico (Huapaya(2012).

La construcción del modelo se logra con la aplicación de la inducción. usando los ceros que se presentan en la información registrada y componiendo los factores, si bien este método en ocasiones no posibilita la representación de modelos para ello es posible entonces la aplicación de otros métodos como los mínimos cuadrados que permiten ajustar una curva para resolver problemas determinados (Cruces, 2018; Bell, sf).

La revisión del procedimiento y la solución es una acción que facilita según el planteo de Polya (1954) que los estudiantes fijen como construir modelos y puedan aplicarlos a problemas posteriores que se presenten en su actividad práctica.

El planteo de la solución en consideración con el contexto es el acto de darle sentido práctico al resultado o sea contextualizar la Matemática que muchas veces en el proceso de aprendizaje está descontextualizada y que los problemas en contextos le permiten al profesor contextualizarlas.

La toma de decisión es un acto importante que le indica al estudiante el porqué de la necesidad de resolver un problema, en estudios realizado por el autor permite comprender el porqué de la importancia de las Matemáticas. la universalidad de su presencia en la sociedad y de ahí la importancia de su aprendizaje y aplicación como herramienta de trabajo.

La comprensión sobre su uso como herramienta de solución de problemas es uno de los grandes dificultades que tiene el aprendizaje de la Matemática debido a ello los estudiantes no valoran completamente la importancia de sus contenidos, por su parte los profesores muchas veces solo ven lo que se refiere al desarrollo del pensamiento lógico y no como se aplican sus contenidos para resolver problemas matemáticos y en otras disciplinas o asignaturas, sin aprovechar la ocasión para generalizar aún más la importancia de la Matemática.

Estas mismas ocasiones pueden ser utilizadas para desarrollar clases entre disciplinas en las cuales se mezclen contenidos de otras disciplinas, porque siempre en los procesos de modelación se presentan dos tipos de contenidos, el propio de la actividad Matemática y el que se refiere al contexto, situación que bien aprovechada puede ser un punto importante para el desarrollo de procesos de motivación y el aprendizaje de esta disciplina.

Para aplicar los aspectos referidos a la modelación de problemas utilizando funciones cuadráticas, se plantea el caso de análisis referido a modelar el tiro de la pelota desde el center Field al receptor a una distancia de 171.5 pies, primer elemento que se debe de considerar, otro elemento es la altura a la que tira el fildeador que es de 5.0 pies. Se asume que a esa altura comienza el tiro, Considerados estos aspectos estamos en condiciones de plantear un modelo inicial que tiene la forma de la ecuación.

La función cuadrática es un caso particular de la función polinomial que para n= 2 tiene la forma $Y = ax^2 + bx + c$, donde a,b y c son constantes, al gráfico de esta se le llama parábola. También es importante precisar que en este trabajo se aplica el método de los mínimos cuadrados procedimiento matemático de cálculo descrito por Gauss en su estudio sobre el cuerpo celeste Ceres, este método necesita como mínimo tres observaciones y su esencia es eliminar de la mejor forma posible la diferencia entre los valores reales y los estimados.

Si se considera que c es la altura a la que tira el fildeador y que coincide con el punto de intercepción de la curva y el eje x y con base en el análisis realizado, entonces se tienen los siguientes puntos.

(0, C) = (0,5), que es el punto donde se puede originar la parábola.

(171;0,0) es la distancia que existe entre el fildeador y el receptor, a los efectos de estimar el modelo es posible estimar al menos dos puntos más que pueden ser deducidos del gráfico del tiro, estos puntos los puede absorber el error del modelo que debe estar entre los valores permisibles.

Los puntos importantes y decisivos en la selección de los datos, se refieren al inicio y el final del tiro y la altura, en los utilizados existen dos pares de datos conocidos y uno que no se conoce, este se estiman y existen variados métodos para chequear su pertenencia o no al modelo, o su grado de aproximación a los resultados del modelo, e este caso de estudio se trata de la altura del tiro que fue estimada por una persona situada a 83.0 pies de donde se produce el tiro que estima pasó a una altura de 46 metros.

El análisis de datos de la modelación del lanzamiento que se proponen contiene los datos descritos en tabla 1.

Tablña 1. Tabla de los datos observados.

X	Y
0	5
83.	46.
171.52	0

Ahora se aplica el método de los mínimos cuadrados mediante el uso del Statgraphic versión XV y se obtienen los siguientes resultados.

Regresión Polinomial - Col_2 versus Col_1

Variable dependiente: Col_2 (Valores de Y)
Variable independiente: Col_1 (Valores de x)
Orden del polinomio = 2

Tabla 2. Valores del modelo.

		Error	*Estadístico*	
Parámetro	*Estimado*	*Estándar*	*T*	*Valor-P*
CONSTANTE	4,98999	0,00926491	538,59	0,0012
Col_1	1,00005	0,000352347	2838,25	0,0002
Col_1^2	-0,00599996	0,00000210303	-2853,01	0,0002

La salida muestra los resultados de ajustar un modelo de una funciión polinomial de segundo orden se observa en la tabla 2, que describe la relación entre Col_2 y Col_1. La ecuación del modelo ajustado es

Col_2 = 4,98999 + 1,00005*Col_1 - ,00599996*Col_1^2

Tabla 3. Valores de significación del modelo.

Análisis de Varianza

Fuente	***Suma de Cuadrados***	***Gl***	***Cuadrado Medio***	***Razón-F***	***Valor-P***
Modelo	**1534,97**	**2**	**767,483**	**4126095,96**	**0,0003**
Residual	**0,000186007**	**1**	**0,000186007**		
Total (Corr.)	**1534,97**	**3**			

También el reporte tiene los siguientes tresutados.

R-cuadrada = 100,0 porciento

R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 100,0 porciento

Error estándar del est. = 0,0136384

Error absoluto medio = 0,00513397

Estadístico Durbin-Watson = 1,49608 (P=0,3413)

Autocorrelación de residuos lag 1 = -0,0174819

Análisis de los resultados.

Como el valor-P en la tabla ANOVA de la tabla 3 es menor que 0,05, existe una relación estadísticamente significativa entre Col_2 y Col_1 con un nivel de confianza del 95%.

El estadístico R-Cuadrada indica que el modelo ajustado explica 100,0% de la variabilidad en Col_2. El estadístico R-Cuadrada ajustada, que es más apropiada para comparar modelos con diferente número de variables independientes, es 100,0%.

El error estándar del estimado muestra que la desviación estándar de los residuos es 0,0136384. Este valor puede usarse para construir límites para nuevas observaciones, el error absoluto medio (MAE) de 0,00513397 es el valor promedio de los residuos. El estadístico de Durbin-Watson (DW) examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P mayor que 0,05, no hay indicación de correlación serial en los residuos, con un nivel de confianza del 95%.

Para determinar si el orden del polinomio es apropiado, primero note que el valor-P en el término de mayor orden es igual a 0,00022314. Puesto que el valor-P es menor que 0,05, el término de mayor orden es estadísticamente significativo con un nivel de confianza del 95%. Consecuentemente, es probable que no sea necesario considerar ningún otro modelo de orden menor, por lo que se puede afirmar que el modelo describe con adecuados niveles de significación el contexto en estudio.

La ecuación obtenida permite aplicar determinados procedimientos matemáticos para obtener otros valores significativos del análisis de la curva, uno de ellos es la obtención de los ceros, que se obtienen aplicando cualquiera de los procedimientos matemáticos utilizados para ello, aunque este autor recomienda el llamado método del discriminante, que en la actualidad es poco utilizado por los estudiantes aunque es uno de los métodos más generales pués resuelve los problemas de mayores complejidades.

Para verificar ceros, entonces se plantea.

$X_{1,2}$ = (-b +- Raíz(b2 – 4ac))/ 2ª

Y se llega a que x_1= -4,85 y x_2 =171,525 son los ceros de la curva.

Analice en la figura 1, los puntos fundamentales de la curva para que comprenda la solución del problema planteado que el modelo del tiro de la pelota. Observe que el segundo valor coincide con la longitud del tiro realizado.

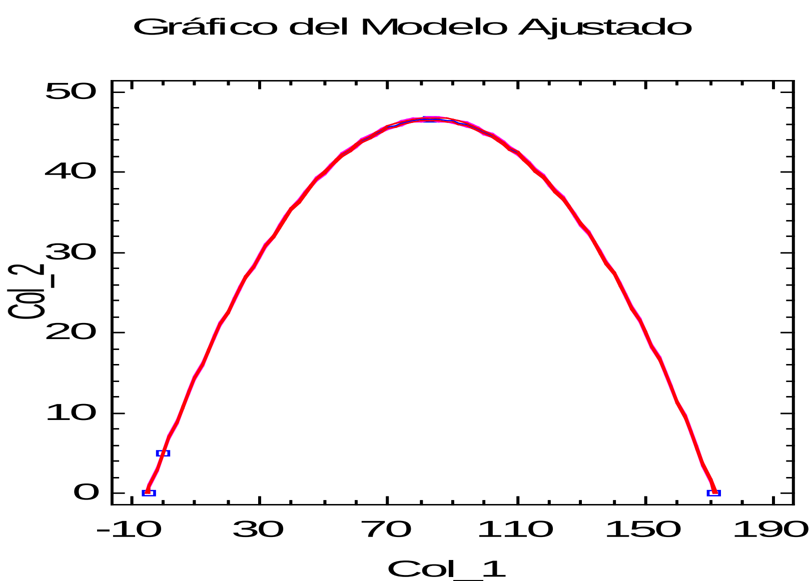
También puede ser posible el análisis de la monotonía. La función que describe el tiro realizado es creciente desde (0;5) hasta (83,33;46,66) indicando que el implemento tirado lleva el impulso que le dio el que lo envióló y representa la fuerza y la velocidad del tiro.

En el intervalo desde el valor máximo hasta el punto (171;0) la función es decreciente lo que indica que disminuye el efecto del que tira y comienza el implemento a caer en forma libre solo impulsado por la fuerza de gravedad.

El problema planteado y resuelto con la aplicación de la modelación matemática y el método de los mínimos cuadrados contribuye a resaltar la importancia de la Matemática para resolver problemas que se presentan en la sociedady es una forma de su aplicación en la cultura física y el deporte.

Este planteamiento de problemas puede ser resuelto con la aplicación de métodos manuales a partir de métodos en los que se aplica la factorización pero muchas veces saldrán funciones cuadráticas con un grado de dificultad tan exigentes que pueden hacer imposible el cálculo de la solución por métodos manuales en este caso este método es muy afectivo.

Figura 1. Gráfico del modelo del caso en estudio.



Conclusiones.

Los modelos matemáticos conocidos como funciones cuadráticas es uno de los más utilizados debido a la amplia cantidad de problemas que se modelan con esa función matemática, permiten describir con niveles adecuados de certezas los lanzamientos de implemento y realizar algunos análisis que permitan valorar el efecto de la fuerza con que se tira el implemento.

El modelo obtenido permite hacer valoraciones reales importantes acerca de la trayectoria del implemento.

El caso analizado también permite hacer valoraciones y análisis acerca de la aplicación de la Matemática para modelar situaciones de la realidad, lo que puede contribuir a resaltar su importancia para la ciencia y la sociedad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Araujo, J. L. (2009). Un Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educado matemática crítica. A LEXA NDRTA Revista de Educagao em Ciencia eTecnologia, 2 (2), 55-68.
2. Belt, E. (sf). Los Grandes Matemáticos, cap 14 el príncipe de las matemáticas Gauss. Material Digital.
3. Hit, F. (2002). Funciones en contexto. México: Prentice Hall.
4. Blum W; Galbrith, P; Henn, H; Niss, M .(2007). Modeling and aplications in mathematics educations, new york springers.
5. Cruces S. (2018). El método de los mínimos Cuadrados, departamento d Matemática, Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
6. Huapaya, E.(2012). Modelación utilizando funciones cuadráticas, Experimento con estudiantes de 5to de secundaria, Pontificia universidad católica del Perú, Lima, Perú.
7. Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Princeton: Princeton University Press. EUA.
8. Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de Matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME XXI), en la cuidad de Maracaibo-Venezuela entre el 22 y el 26 de julio 2007.
9. Villa, J; Ruiz, H. (2009). Modelación en educación Matemática desde los lineamientos Y estándares curriculares en Colombia, "Revista Virtual Universidad Católica del Norte". No. 27, (mayo – agosto de 2009, Colombia), acceso: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/], ISSN 0124-5821.Colombia.